

**Thèse de doctorat de l'Université Pierre
Et Marie Curie-Paris VI**

Présentée et soutenue publiquement le 19 Septembre 2014
pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie-Paris VI
Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Rahma Agroum

Sujet de thèse :

**Discrétisation spectrale des équations de Navier-Stokes
couplées avec l'équation de la chaleur**

Composition du jury

M. Yvon MADAY	Président
M ^{me} . Christine BERNARDI	Directrice de thèse
M ^{me} . Saloua AOUADI	Directrice de thèse
M. Mejdi AZAÏEZ	Rapporteur
M. Jean Pierre CROISILLE	Rapporteur
M. Azgal ABICHOU	Membre
Mme. Samira SAADI	Membre

Laboratoire Jacques-Louis Lions-UMR 7598



Remerciments

Au cours de cette thèse j'ai eu la chance d'être encadré par Mme Chrsitine Bernardi et Mme Saloua Aouadi. Je tiens à leurs remercier vivement pour leur aide, leur disponibilité et leurs conseils, elles m'ont permis d'accomplir cette thèse et de dépasser ce dont je me pensais capable. Par leur exigence et par leur rigueur, elles m'ont initiée et formée au métier de la recherche et m'en ont donné le goût, même si tout n'a pas toujours été facile. Je voudrais leur adresser ma plus profonde reconnaissance et leur dire toute mon admiration pour leurs valeurs tant humaines que professionnelles. Je tiens à remercier très vivement M. Yvon Maday qui me fait l'honneur de présider mon jury de thèse. La lourde tâche de rapporteur a été acceptée par M. Mejdi Azaeiz et M. Jean Pierre Croisille. Leurs remarques m'ont été d'une grande utilité. Je remercie sincèrement Mme. Samira Saadi et M. Azgal Abichou d'avoir accepté de faire partie de mon jury et pour leur déplacement à Paris. J'ai été très heureuse de travailler avec Jamil Satouri. Ensemble nous avons amélioré nos résultats numériques, merci de votre aide dans le calcul scientifique. Je tiens à remercier tous mes enseignants tout au long de mes études en particulier M. Moncef Touihri. Je remercie également le directeur du Laboratoire M. Sami Baraket pour l'effort qu'il fait à chaque fois pour financer mes séjours. Je n'oublie pas toutes les personnes exceptionnelles du mon bureau qui ont rendu cette thèse très agréable par leur bonne humeur et qui sont devenus mes amis : Sara, Roberto, Dena, Stéphane, Sébastien, Jean-Yves. Je pense aux doctorants des autres bureaux, et en particulier à Wafaa. Je remercie tous mes amis en particulier Besma pour son amitié et pour la patience avec laquelle elle a toujours répondu à mes problèmes de LATEX. Une pensée émue pour tous mes amies de Foyer des Diaconnesses : Sara, Chirine, Lydia, Ana, Hana, Hela, Nuria, Rebeka avec qui j'ai partagé un repas. Enfin, j'arrive à ceux dont la présence dépasse grandement le contexte de la thèse. Merci à l'ensemble de ma famille et plus particulièrement mes parents et mes soeurs Nawel et Initissar. Sans vous, je n'aurais sans doute pas réussi à aller au bout. Votre présence et votre amour m'ont portée jusqu'à la fin.

Table des matières

I	Analyse du problème stationnaire	20
1	Équations de Navier-Stokes/chaleur stationnaires	21
1.1	Introduction	21
1.2	Problème continu	22
1.2.1	Formulation variationnelle	22
1.2.2	Étude du problème	24
1.2.3	Régularité de la solution	31
2	Discrétisation spectrale des équations de Navier-Stokes/chaleur stationnaires	32
2.1	Introduction	32
2.2	Outils de la discrétisation	32
2.2.1	Espaces discrets	32
2.2.2	Polynômes orthogonaux dans $L^2(\Lambda)$	34
2.2.3	Formule de Gauss-Lobatto	35
2.3	Approximation polynomiale	36
2.3.1	Dans un intervalle Λ	36
2.3.2	Dans un carré	37
2.4	Interpolation polynomiale	39
2.4.1	Dans un intervalle	39
2.4.2	Dans un carré	39
2.5	Le problème discret	40
2.6	Estimation de l'erreur	41
2.6.1	Estimation <i>a priori</i> de l'erreur pour le problème de Stokes	43
2.6.2	Estimation <i>a priori</i> de l'erreur pour le problème de Laplace	45
2.6.3	Problème discret sur la pression	58
2.7	Implémentation numérique	62
2.7.1	Algorithme de résolution pour le problème de Navier-Stokes/chaleur	62
2.8	Système matriciel	62
2.8.1	Description du système linéaire	64
2.9	Mise en œuvre	67
2.9.1	Calcul des matrices	67
2.9.2	Algorithme d'Uzawa	69
2.10	Résultats numériques	71

II	Analyse du problème instationnaire	84
3	Équations de Navier-Stokes/chaleur instationnaires	85
3.1	Présentation des équations	85
3.2	Outils mathématiques	86
3.3	Étude du problème continu	87
3.3.1	Formulation variationnelle	87
3.3.2	Existence et unicité de la solution	88
4	Discrétisation spectrale des équations instationnaires	95
4.1	L'approximation temporelle	95
4.1.1	Existence et unicité de la solution	97
4.2	Approximation spatiale	99
4.3	Estimation a priori	100
4.3.1	À propos de la discrétisation en temps	101
4.3.2	À propos de la discrétisation en espace	106
4.4	Résultats numériques	114
4.4.1	Système matriciel :	114
4.4.2	Mise en œuvre	116
4.5	Algorithme pour la résolution du système linéaire	117
4.6	Tests numériques	117

Liste des tableaux

2.1	Erreur relative en fonction de N de (2.10.4).	79
2.2	Convergence de la solution (2.10.7) en fonction de $\nu(T)$	82
4.1	Erreur relative en fonction de δt de (4.6.1) et (4.6.2) pour $\nu(T) = 1$	118
4.2	Erreur relative en fonction de δt de (4.6.1) et (4.6.2) pour $\nu(T)(x,y) =$ $x + y + t + 1$	118
4.3	Erreur relative en fonction de δt de (4.6.1) et (4.6.2) pour $\nu(T) = \sqrt{T^2 + 1} +$ 2	119
4.4	Erreur relative en fonction de N de (4.6.3) et (4.6.4) pour $\tilde{T} = 1$	122
4.5	Erreur relative en fonction de N de (4.6.3) et (4.6.4) pour $\tilde{T} = 0.1$	122
4.6	Erreur relative de (4.6.5) et (4.6.6) pour $N = 20$	126

Table des figures

2.1	Les courbes de la première et la deuxième composante de la vitesse (en haut) et de la fonction pression et température (en bas).	72
2.2	L'erreur de la solution de (2.10.1) et (2.10.2)	72
2.3	Courbe de convergence en norme $L^2(\Omega)^2$ et $H^1(\Omega)^2$ de (2.10.1) et (2.10.2).	73
2.4	Courbe de convergence en norme $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ de (2.10.1) et (2.10.2).	73
2.5	Courbe de convergence en norme $L^2(\Omega)$ de (2.10.1) et (2.10.2).	74
2.6	Les courbes de la première et la deuxième composante de la vitesse (en haut) et de la pression et la température (en bas) calculée pour $N = 24$	75
2.7	L'erreur de la solution de 2.10.3.	76
2.8	Les courbes et les isovaleurs de la première et la deuxième composante de la vitesse calculée pour $N = 24$	78
2.9	Les courbes et les isovaleurs de la fonction pression et température calculée pour $N = 24$	78
2.10	Courbes de convergence de (2.10.4) en fonction de N	79
2.11	Les isovaleurs de la solution discrète issu de (2.10.6).	80
4.1	Les courbes d'erreur pour $v(T) = 1$, $v(T)(x, y) = xyt + 1$ et $v(T) = \sqrt{T^2 + 1} + 2$ en fonction du logarithme du pas de temps.	120
4.2	Courbe de convergence de (4.6.3) et (4.6.4) pour $\delta t = 10^{-2}$ et $\tilde{T} = 1$	124
4.3	Courbe de convergence de (4.6.3) et (4.6.4) pour $\delta t = 10^{-2}$ et $\tilde{T} = 0.1$	124
4.4	Les isovaleurs de la première et la deuxième compsanete de la vitesse exacte (en haut) et de la pression et la température exacte (en bas) pour $N = 40$	127
4.5	Les isovaleurs de la première et la deuxième compsanete de la vitesse calculée (en haut) et de la pression et la température calculée (en bas) pour $N = 40$	127
4.6	Les courbes et les isovaleurs de la première et la deuxième composante de la vitesse pour $\tilde{T} = 1$	129
4.7	Les courbes et les isovaleurs de la fonction pression et la fonction température pour $\tilde{T} = 1$	129
4.8	Les courbes et les isovaleurs de la première et la deuxième composante de la vitesse pour $\tilde{T} = 0.1$	130
4.9	Les courbes et les isovaleurs de la fonction pression et la fonction température pour $\tilde{T} = 0.1$	130

Introduction générale

Les équations de Navier-Stokes décrivant l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible tel que l'eau, l'air, le pétrole en régime stationnaire ou instationnaire, ont fait et font encore l'objet d'un grand nombre de travaux de recherche. La variation d'un des paramètres associés à ces équations (domaine sur lequel sont posées les équations, conditions aux limites, nature des données, formulation variationnelle des équations, dépendance par rapport au temps, choix de la méthode d'approximation,...) fournit un nouveau problème et un nouveau sujet de recherche.

Ces équations permettent souvent par une résolution approchée de proposer une modélisation des courants océaniques et des mouvements des masses d'air de l'atmosphère pour les météorologistes, la simulation numérique des ponts sous l'action du vent pour les architectes et ingénieurs, mais aussi l'écoulement trivial de l'eau dans un tuyau et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de divers fluides.

Ces équations apparaissent dans l'étude de nombreux phénomènes, seules ou couplées avec d'autres équations. Dans le cadre de cette thèse, nous choisissons de coupler les équations de Navier-Stokes avec l'équation de la chaleur. En physique théorique, cette dernière est une équation aux dérivées partielles parabolique qui décrit le phénomène physique de conduction thermique. Elle est aussi utilisée en mathématiques financières (équation de Black-Scholes). Une des principales difficultés pour étudier et résoudre les équations de Navier-Stokes/chaleur sont d'une part le couplage vitesse/pression et vitesse/température et d'autre part la présence du terme de convection non linéaire.

Un modèle thermodynamique similaire mais légèrement plus complexe a été récemment analysé dans [14].

D'une part, pour l'approximation d'un tel système comme pour toutes les équations aux dérivées partielles, on est confronté à un nouveau problème : le choix de la méthode d'approximation. La littérature nous fournit plusieurs méthodes dont la méthode des différences finies, celle des éléments finis, les méthodes spectrales, la méthode des éléments spectraux avec joints...

La méthode des éléments finis a l'avantage (entre autres) de permettre de traiter toutes les géométries possibles sans trop de difficultés et avec une bonne précision tout en utilisant un nombre raisonnable de degrés de liberté. Un premier travail, par la méthode des éléments finis sur les équations de Navier-Stokes couplées avec celle de la chaleur où la viscosité du fluide dépend de la température, auxquelles nous nous intéressons a été déjà fait en [5]. Un deuxième travail, a été fait aussi par la méthode des éléments finis, en couplant localement les équations de Navier-Stokes avec l'équation de l'énergie cinétique

turbulente par une viscosité turbulente, voir [7].

Ici, nous optons pour les méthodes spectrales comme méthode d'approximation pour ces équations. Ces méthodes ont été introduites pour la première fois par S. A. Orszag [31] et développées, ensuite, par de multiples auteurs dont Bernardi et Maday [8]. Ces méthodes permettent d'obtenir des approximations d'équations aux dérivées partielles avec une bonne précision et une convergence rapide. Leur principale caractéristique est que les solutions discrètes sont cherchées dans des espaces de polynômes de haut degré. Les intégrales sont évaluées au moyen de formules de quadrature appropriées. Ces méthodes sont également très avantageuses, non seulement pour la simplicité des bases qu'elles fournissent et qui sont obtenues en dimension quelconque d'espace par une tensorisation de la base en dimension 1, mais aussi et surtout pour la nature de la convergence des solutions discrètes obtenues vers les solutions continues correspondantes. En ce sens, la précision de ces méthodes n'est limitée que par la régularité de la fonction à approcher. Ajoutons à ça, leur implémentation relativement simple et leur coût raisonnable qui ont fait d'elles des méthodes aussi attractives que compétitives. Ceci leur a permis de trouver un grand succès dans les milieux industriels, essentiellement dans les domaines de l'aéronautique, de la météorologie, de la mécanique des solides non linéaire. Les domaines où ces équations (équations elliptiques ou paraboliques) sont posées, se multiplient et se généralisent. Grâce aux produits de tensorisation sur les polynômes, la géométrie de base est soit un carré soit un cube et il est bien connu que la méthode s'adapte parfaitement à ce genre de domaines. Nous pouvons trouver des extensions sur des trapèzes, cylindres ou même des cônes, par conséquent, le champ d'applications des méthodes spectrales ne se limite plus aux géométries simples, mais s'étend aux situations complexes [4], voir les références [6], [22] et [36] pour plus de détails. Beaucoup de problèmes ont été résolus par cette méthode et l'efficacité de la méthode a été montrée aussi bien sur un domaine unique que sur une union de sous-domaines.

D'autre part, approcher les vitesses et la pression par des polynômes de même degré entraîne que la solution numérique de la pression est polluée par les éléments du noyau de la matrice du problème discret appelés modes parasites de pression [10]. Bien qu'on obtienne une bonne approximation des vitesses aux points de collocation, on doit effectuer un filtrage de ces modes parasites de manière à obtenir une bonne pression discrète. Une manière de résoudre cette difficulté est d'utiliser des grilles de collocation décalées [35] pour la vitesse et la pression, de manière que les espaces polynômiaux de vitesse et de pression soient compatibles. Néanmoins la présence de grilles décalées alourdit la programmation et augmente les temps de calcul. Une autre méthode proposant des espaces polynômiaux compatibles est la méthode $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$, dont l'analyse numérique et la mise en œuvre ont été réalisées par Rønquist [33], Azaïez [3] et Maday et al [29]. La condition inf-sup est vérifiée en prenant pour la pression des polynômes de degré moins élevé de deux unités que ceux approchant la vitesse. L'avantage de cette méthode est de n'utiliser qu'une seule grille.

Un autre sujet important abordé dans ce travail est la discrétisation temporelle des équations stationnaires. La manière classique réside dans le choix d'un schéma implicite pour le terme linéaire. La mise au point d'une telle méthode, qui doit être à la fois stable et d'une précision d'ordre élevé, n'est pas évidente. En fait, les concepts de stabilité et de précision sont liés. Plus le schéma temporel est stable, plus le pas de temps admissible est grand.

Ce mémoire de thèse est structuré de la façon suivante :

Dans la première partie de ce travail, on traite les équations de Navier-Stokes couplées avec celle de la chaleur stationnaire, la formulation qu'on considère est celle où les inconnues sont la vitesse, la pression et la température. Dans le premier chapitre, on présente le problème continu sous sa forme variationnelle et les principaux outils fonctionnels qui permettent de déduire les résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution. Vu la non linéarité du problème on a recours pour cela au théorème de Brouwer.

L'objet du deuxième chapitre est la discrétisation spectrale du problème de Navier-Stokes chaleur stationnaire. Dans un premier temps, nous introduisons les outils de base pour la méthode spectrale : les polynômes orthogonaux dans $L^2([-1, 1])$, la formule de quadrature et les opérateurs d'interpolation et d'approximation polynomiale sur un segment $\Lambda = [-1, 1]$, puis par tensorisation sur un carré $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Pour discrétiser le problème, on utilise la méthode de Galerkin avec intégration numérique, c'est-à-dire on remplace l'espace continu par un espace de dimension finie, et les intégrales exactes par une formule de quadrature. Plus précisément, on utilise la méthode $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$, dans un second temps et afin d'étudier le problème discret, on l'écrit sous forme d'un problème de Stokes et de Laplace avec de nouvelles données. Nous utilisons ensuite le théorème de Brezzi-Rappaz-Raviart [13] pour prouver que le problème discret est bien posé et qu'il admet une solution localement unique. De plus, ce théorème nous permet de prouver des estimations d'erreur qui s'avèrent optimales.

Enfin, nous nous intéressons à la mise en œuvre et à l'algorithme de Newton utilisé pour traiter numériquement les équations discrètes qui sont abordés de façon linéaire à chaque itération. Nous commençons par écrire le système matriciel. Pour la résolution, on utilise l'algorithme d'Uzawa. Le code de calcul est développé en langage MATLAB[®]. Nous présentons à la fin, des résultats numériques cohérents avec les résultats théoriques.

Dans le troisième chapitre, nous abordons l'analyse du problème de Navier-Stokes/chaleur instationnaire, ensuite, nous rappelons quelques outils mathématiques pour aborder les équations dépendant du temps. Puis, nous prouvons l'existence de la solution, l'unicité a été démontrée en dimension $d = 2$ et reste encore un problème ouvert en dimension $d = 3$ pour les équations non linéaire.

Dans le quatrième chapitre, nous discrétisons les équations instationnaires à l'aide des méthodes spectrales en espace, et d'un schéma d'Euler implicite en temps : c'est une méthode numérique pour résoudre par approximation les équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale. Nous prouvons l'existence de la solution et nous préférons de suivre l'approche de Brezzi, Rappaz et Raviart [13] pour obtenir des résultats plus précis pour prouver que le problème discret admet une solution localement unique (en dimension $d = 2$ ou 3). Ce théorème nous permet d'obtenir des estimations d'erreur optimales. Ce chapitre se conclut par l'analyse et la présentation des résultats numériques prouvant l'efficacité de la méthode spectrale.

Notations et quelques rappels

Nous présentons ici les notations utilisées dans cette thèse.

Les différents lemmes, propositions, remarques et théorèmes sont, dans ce manuscrit, numérotés dans chaque chapitre de manière séquentielle. Les quantités scalaires seront simplement en minuscule. Les espaces de fonctions à valeurs vectorielles ainsi que les champs de vecteurs seront notés en caractère gras. Par exemple, la vitesse sera notée $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, la pression sera notée p et la température sera notée T .

Notations générales

- d : dimension de l'espace.
- Ω : ouvert borné et connexe à frontière lipschitzienne de \mathbb{R}^d .
- \mathbf{x} : le point générique de Ω .
- (x_1, \dots, x_d) : les coordonnées de \mathbf{x} .
- $\partial\Omega$: frontière de Ω .
- p, q : pressions.
- \mathbf{u}, \mathbf{v} : champs de vecteurs vitesses.
- t : temps.
- $\nabla \cdot \mathbf{v}$ ou $\text{div } \mathbf{v}$: divergence d'un champ de vecteurs \mathbf{v} .
- $\nabla \mathbf{v}$: gradient d'un champ de vecteurs \mathbf{v} .
- $p.p$: presque partout.

- N : paramètre de discrétisation.
- p_N, q_N : pressions discrètes.
- u_N, v_N : champs de vecteurs vitesses discrets.

Espaces fonctionnels

Pour plus de détails sur les définitions et les propriétés des espaces de Sobolev nous renvoyons le lecteur à [1], [12] et [27].

- X : espace de Hilbert séparable.
- X' : dual topologique de X .
- $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω .
- $\mathcal{D}'(\Omega)$ le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω .
- Soit p , tel que $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions u de Ω dans \mathbb{R} mesurables.
- $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev d'ordre m muni de la norme $\|\cdot\|_{m,p}$ tel que

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \forall \beta \in \mathbb{N}^d, |\beta| \leq m, \partial^\beta u \in L^p(\Omega)\}.$$

Dans le cas particulier $p = 2$, l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ est noté plus simplement $H^m(\Omega)$.

- $H_0^m(\Omega)$ est l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.
- $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{g \in L^2(\partial\Omega), \exists u \in H^1(\Omega), \text{ tel que } u|_{\partial\Omega} = g\}$.
- $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ est le dual topologique de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Produits scalaires, normes, semi-normes, produits de dualité

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ est le produit de dualité entre X et X' .

- $\forall u \in L^p(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } p < +\infty \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$
- $\forall u, v \in L^2(\Omega)$, $(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$
- $\forall u \in H^m(\Omega)$, $\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\beta| \leq m} |\partial^\beta u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$
- $\forall u \in H^m(\Omega)$, $|u|_{H^m(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\beta|=m} |\partial^\beta u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$, semi-norme de u dans $H^m(\Omega)$.
- $\forall g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf \left\{ \|v\|_{H^1(\Omega)}, v \in H^1(\Omega) \text{ et } T_1^{\partial\Omega}(v) = g \right\}.$

Première partie

Analyse du problème stationnaire

Équations de Navier-Stokes/chaleur stationnaires

1.1 Introduction

Nous considérons le système suivant qui modélise l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible occupant le domaine Ω , dans le cas où la viscosité de ce fluide dépend de la température.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\nu(T)\nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{grad} p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ -\alpha \Delta T + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T = g & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.1.1)$$

On impose de plus, des conditions aux limites sur la vitesse et la température. Les inconnues sont le champ de vecteurs \mathbf{u} à valeurs dans \mathbb{R}^d , qui représente la vitesse du fluide, la fonction scalaire p qui représente sa pression et T qui représente la température de ce fluide.

La fonction \mathbf{f} représente une densité de forces extérieures appliquée au fluide, la fonction g est une donnée, la fonction α est le coefficient de diffusion de la chaleur et la fonction ν est la viscosité du fluide qu'on suppose dépendre de la température.

Le problème qu'on va résoudre s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\nu(T)\nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{grad} p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ -\alpha \Delta T + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T = g & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D & \text{sur } \partial\Omega, \\ T = T_b & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (1.1.2)$$

1.2 Problème continu

On se donne des distributions \mathbf{f} dans $H^{-1}(\Omega)^d$ et g dans $H^{-1}(\Omega)$ et on suppose que ν est une fonction qui appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$ et qui satisfait

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \nu_1 \leq \nu(\theta) \leq \nu_2. \quad (1.2.1)$$

où ν_1 et ν_2 sont deux constantes positives.

Afin d'éviter les résultats techniques liés au lemme de Hopf, voir Girault et Raviart [24, Chap. IV, Lemma 2.3] pour l'analyse de ce problème, on suppose que $\mathbf{u}_D = \mathbf{0}$.

Le cadre fonctionnel dans lequel le problème (1.1.2) est bien posé fait intervenir des espaces différents pour la vitesse, la pression et la température. Il s'agit des espaces $H_0^1(\Omega)^d$ pour la vitesse, $H^1(\Omega)$ pour la température et $L_0^2(\Omega)$ pour la pression, i.e. nous fixons la constante en cherchant p à moyenne nulle avec

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0\}.$$

1.2.1 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle s'écrit :

Trouver $(\mathbf{u}, p, T) \in H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ tels que :

$$T = T_b \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \quad (1.2.2)$$

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad & \int_{\Omega} \nu(T)(\mathbf{x}) (\mathbf{grad} \mathbf{u})(\mathbf{x}) : (\mathbf{grad} \mathbf{v})(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div} \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}, \\ \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad & - \int_{\Omega} (\text{div} \mathbf{u})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \\ \forall S \in H_0^1(\Omega), \quad & \alpha \int_{\Omega} (\mathbf{grad} T)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{grad} S)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) T)(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle g, S \rangle_{\Omega}. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Proposition 1.2.1

Les problèmes (1.1.2) et (1.2.2)–(1.2.3) sont équivalents au sens que :

- 1) Toute solution du problème (1.1.2) appartenant à $H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ est solution du problème (1.2.2)–(1.2.3).
- 2) Toute solution du problème (1.2.2)–(1.2.3) est solution du problème (1.1.2) au sens des distributions.

Démonstration. 1) En multipliant la première équation de (1.1.2) par une fonction ψ de $\mathcal{D}(\Omega)^d$, en intégrant par parties, nous obtenons la première équation de (1.2.3) par densité, lorsque ψ décrit l'espace $H_0^1(\Omega)^d$, de la même manière nous obtenons la troisième équation du problème (1.2.3) par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. La deuxième équation

est obtenue par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

2) Réciproquement, soit ψ dans $\mathcal{D}(\Omega)^d \subset H_0^1(\Omega)^d$. On a,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nu(T)(\mathbf{x})(\mathbf{grad} \mathbf{u})(\mathbf{x}) : (\mathbf{grad} \psi)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{x}) \\ - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \psi)(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \psi \rangle_{\Omega}. \end{aligned}$$

En intégrant par partie on a pour tout ψ dans $\mathcal{D}(\Omega)^d$,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nu(T) \nabla \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} (\mathbf{grad} p)(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \psi \rangle_{\Omega}. \end{aligned}$$

Donc pour tout ψ dans $\mathcal{D}(\Omega)^d$,

$$\langle -\operatorname{div}(\nu(T) \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{grad} p - \mathbf{f}, \psi \rangle_{\Omega} = 0.$$

D'où,

$$-\operatorname{div}(\nu(T) \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{grad} p - \mathbf{f} = 0 \quad \text{dans } \Omega \text{ au sens des distributions.}$$

Soit ψ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$- \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0,$$

et par conséquent $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ dans Ω au sens des distributions.

Puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, si on prend ψ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ on aura

$$\alpha \int_{\Omega} (\mathbf{grad} T)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{grad} \psi)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) T)(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle g, \psi \rangle_{\Omega},$$

en intégrant par partie on a,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \alpha (\Delta T)(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) T)(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle g, \psi \rangle_{\Omega}, \\ \langle -\alpha \Delta T, \psi \rangle + \langle (\mathbf{u} \cdot \nabla) T, \psi \rangle_{\Omega} = \langle g, \psi \rangle_{\Omega}, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

D'où,

$$-\alpha \Delta T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = g \quad \text{dans } \Omega \text{ au sens des distributions.}$$

Finalement, la condition $\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega$, étant assurée par l'appartenance de \mathbf{u} à $H_0^1(\Omega)^d$.

On obtient alors le problème (1.1.2), on déduit donc l'équivalence entre (1.1.2) et (1.2.2)–(1.2.3).

Nous avons donc bien construit une formulation équivalente au système (1.1.2).

1.2.2 Étude du problème

Afin de montrer que le problème variationnel est bien posé, on introduit l'espace suivant :

$$V(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \right\}. \quad (1.2.4)$$

On énonce le lemme suivant, pour la démonstration, on réfère à Girault et Raviart, voir [24, Chap. I, Cor. 2.4].

Lemme 1.2.1

On a la condition inf-sup

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d} \frac{\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d}} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.2.5)$$

où β est une constante positive.

Proposition 1.2.2

Les deux propriétés suivantes sont vérifiées, pour tout \mathbf{u} dans $V(\Omega)$ et \mathbf{v}, \mathbf{z} dans $H_0^1(\Omega)^d$,

(i) la propriété d'antisymétrie à savoir :

$$\int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v})(\mathbf{x}) \mathbf{z}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{z})(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.2.6)$$

(ii)

$$\int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v})(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (1.2.7)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v})(\mathbf{x}) \mathbf{z}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} z_i d\mathbf{x} \\ &= - \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j z_i) v_i d\mathbf{x}, \quad \text{par intégration par partie} \\ &= - \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} u_j \frac{\partial z_i}{\partial x_j} v_i d\mathbf{x} - \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} z_i v_i d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi,

$$\int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v})(\mathbf{x}) \mathbf{z}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{z})(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{z} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{u} d\mathbf{x},$$

d'où le résultat puisque \mathbf{u} appartient à $V(\Omega)$.

Théorème 1.2.1

Pour toutes données \mathbf{f} de $H^{-1}(\Omega)^d$, g de $H^{-1}(\Omega)$ et T_b de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, le problème (1.2.2)–(1.2.3) admet au moins une solution (\mathbf{u}, p, T) dans $H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$. De plus, la solution satisfait l'estimation suivante

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d} + \|T\|_{H^1(\Omega)} \leq c (\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d} + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}). \quad (1.2.8)$$

où c est une constante qui dépend uniquement de ν_1 et de α .

Démonstration.

1) Soit \mathcal{R} un opérateur de relèvement c'est-à-dire l'opérateur continu de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, d'après le théorème de trace il existe une fonction noté \bar{T}_b de T_b qui satisfait :

$$\bar{T}_b = \mathcal{R} T_b$$

Il est clair que la fonction \bar{T}_b appartient à $H^1(\Omega)$ et satisfait

$$\|\bar{T}_b\|_{H^1(\Omega)} \leq c_\diamond \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}. \quad (1.2.9)$$

Nous réfèrons à Girault et Raviart, voir [24, Chap. IV, Lemma 2.3] pour le résultat suivant : Nous choisissons cet opérateur tel que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\|\bar{T}_b\|_{L^4(\Omega)} \leq \varepsilon \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}, \quad (1.2.10)$$

où la constante c_\diamond est indépendante de ε .

2) On pose $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, T)$ et $\mathbf{V} = (\mathbf{v}, S)$,

on définit l'application Φ de $V(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ sur son espace dual par :

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\mathbf{U}), \mathbf{V} \rangle &= \int_{\Omega} \nu(T + \bar{T}_b) (\mathbf{grad} \mathbf{u})(\mathbf{x}) : (\mathbf{grad} \mathbf{v})(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \alpha \int_{\Omega} \mathbf{grad} (T + \bar{T}_b)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{grad} S)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla)(T + \bar{T}_b))(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} - \langle g, S \rangle_{\Omega}. \end{aligned}$$

Φ est continue sur $V(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\mathbf{U}), \mathbf{U} \rangle &= \int_{\Omega} \nu(T + \bar{T}_b) (\mathbf{grad} \mathbf{u})^2(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \alpha \int_{\Omega} \mathbf{grad} (T + \bar{T}_b)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{grad} T)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla)(T + \bar{T}_b))(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\Omega} - \langle g, T \rangle_{\Omega}, \end{aligned}$$

comme \mathbf{u} dans $V(\Omega)$, d'après (1.2.6) et (1.2.7), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\mathbf{U}), \mathbf{U} \rangle &= \int_{\Omega} \nu(T + \bar{T}_b) (\mathbf{grad} \mathbf{u})^2(\mathbf{x}) + \alpha \int_{\Omega} \mathbf{grad}(T + \bar{T}_b)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{grad} T)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \bar{T}_b)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\Omega} - \langle \mathbf{g}, T \rangle_{\Omega}, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $H_0^1(\Omega)$ s'injecte de façon continue dans $L^4(\Omega)$, en combinant avec (1.2.9) et (1.2.10), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\mathbf{U}), \mathbf{U} \rangle &\geq \nu_1 |\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^d}^2 + \alpha |T|_{H^1(\Omega)}^2 - \alpha |\bar{T}_b|_{H^1(\Omega)} |T|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad - \frac{c_{\diamond} \varepsilon}{2} \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} (|\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^d}^2 + |T|_{H^1(\Omega)}^2) \\ &\quad - \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d} |\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^d} - \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} |T|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

on prend ε tel que

$$c_{\diamond} \varepsilon \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq \min\{\nu_1, \alpha\}.$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\mathbf{U}), \mathbf{U} \rangle &\geq \min\{\nu_1, \alpha\} (|\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^d}^2 + |T|_{H^1(\Omega)}^2) - \alpha |\bar{T}_b|_{H^1(\Omega)} |T|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad - \frac{\min\{\nu_1, \alpha\}}{2} (|\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^d}^2 + |T|_{H^1(\Omega)}^2) \\ &\quad - (\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d}^2 + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^d}^2 + |T|_{H^1(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Or d'après (1.2.9), on aura

$$\begin{aligned} -\alpha |\bar{T}_b|_{H^1(\Omega)} |T|_{H^1(\Omega)} &\geq -\alpha c_{\diamond} \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} |T|_{H^1(\Omega)} \\ &\geq -\alpha c_{\diamond} \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} (|\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^d}^2 + |T|_{H^1(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\mathbf{U}), \mathbf{U} \rangle &\geq \frac{\min\{\nu_1, \alpha\}}{2} (|\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^d}^2 + |T|_{H^1(\Omega)}^2) \\ &\quad - \left(\alpha c_{\diamond} \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + (\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d}^2 + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} \right) (|\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^d}^2 + |T|_{H^1(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ceci implique que $\langle \Phi(\mathbf{U}), \mathbf{U} \rangle$ est positive sur la sphère de $V(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ de rayon

$$\mu = \frac{2}{\min\{\nu_1, \alpha\}} \left(\alpha c_{\diamond} \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + (\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d}^2 + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (1.2.11)$$

3) Comme $\mathcal{D}(\Omega)^d \cap V(\Omega)$ est dense dans $V(\Omega)$, voir Girault et Raviart [24, Chap. I, Cor 2.5] il existe une suite croissante $(\mathbb{V}_n)_n$ de sous-espaces de dimension finie de $V(\Omega)$ et une suite croissante $(\mathbb{W}_n)_n$ de sous-espaces de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$ tel que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{V}_n \times \mathbb{W}_n$ est dense dans $V(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. De plus, on a les mêmes propriétés de la fonction Φ en remplaçant $V(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ par $\mathbb{V}_n \times \mathbb{W}_n$.

Du théorème de point fixe de Brouwer, voir Girault et Raviart [24, Chap. IV, Cor. 1.1], il résulte l'existence d'un $\mathbf{U}_n = (\mathbf{u}_n, T_n)$ dans $\mathbb{V}_n \times \mathbb{W}_n$ tel que

$$\forall \mathbf{V}_n \in \mathbb{V}_n \times \mathbb{W}_n, \quad \langle \Phi(\mathbf{U}_n), \mathbf{V}_n \rangle = 0, \quad (1.2.12)$$

et vérifiant la propriété :

$$(|\mathbf{u}_n|_{H^1(\Omega)^d}^2 + |T_n|_{H^1(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} \leq \mu. \quad (1.2.13)$$

4) Comme \mathbf{u}_n appartient à $H_0^1(\Omega)^d$ et T_n appartient à $H_0^1(\Omega)$ et que leurs normes sont bornées par une constante c grâce à l'inégalité de Poincaré-Friedrichs sur Ω , en utilisant de plus le fait que $H^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^4(\Omega)$, on déduit alors qu'il existe une sous-suite notée encore par $(\mathbf{u}_n, T_n)_n$ pour simplifier qui converge vers le couple (\mathbf{u}, T^*) de $H_0^1(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)$ faiblement dans $H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$ et fortement dans $L^4(\Omega)^d \times L^4(\Omega)$.

On remarque que, pour tout $m \leq n$, (\mathbf{u}_n, T_n) satisfait

$$\forall \mathbf{V}_m \in \mathbb{V}_m \times \mathbb{W}_m, \quad \langle \Phi(\mathbf{U}_n), \mathbf{V}_m \rangle = 0.$$

Passant à la limite sur n est évident pour les termes $(\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \mathbf{u}_n$ et $(\mathbf{u}_n \cdot \nabla) T_n$ qui résulte de la convergence forte dans $L^4(\Omega)^d \times L^4(\Omega)$. D'autre part, grâce aussi à la convergence forte la suite $(\nu(T_n + \bar{T}_b) \mathbf{grad} \mathbf{v}_m)_n$ converge vers $(\nu(T^* + \bar{T}_b) \mathbf{grad} \mathbf{v}_m)$ p.p dans Ω et de plus

$$\|\nu(T_n + \bar{T}_b) \mathbf{grad} \mathbf{v}_m\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \leq \nu_2 \|\mathbf{grad} \mathbf{v}_m\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}.$$

En utilisant alors le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on remarque que la suite $(\nu(T_n + \bar{T}_b) \mathbf{grad} \mathbf{v}_m)_n$ converge vers $\nu(T^* + \bar{T}_b) \mathbf{grad} \mathbf{v}_m$ dans $L^2(\Omega)^{d \times d}$.

On conclut alors que

$$\forall \mathbf{V}_m \in \mathbb{V}_m \times \mathbb{W}_m, \quad \langle \Phi(\mathbf{u}, T^*), \mathbf{V}_m \rangle = 0.$$

En passant à la limite sur m et par densité de $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{V}_m \times \mathbb{W}_m$ dans $V(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ on obtient

$$\forall \mathbf{V} \in V(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \quad \langle \Phi(\mathbf{u}, T^*), \mathbf{V} \rangle = 0. \quad (1.2.14)$$

On déduit donc que le couple $(\mathbf{u}, T = T^* + \bar{T}_b)$ satisfait la première et la troisième équation du problème (1.2.2)–(1.2.3) et aussi

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nu(T) (\mathbf{grad} \mathbf{u})(\mathbf{x}) : (\mathbf{grad} \mathbf{v})(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

5) D'après (1.2.5) et (1.2.15), il existe $p \in L_0^2(\Omega)$, voir Girault et Raviart [24, Chap. I, Lemma 4.1] tel que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \nu(T) (\mathbf{grad} \mathbf{u})(\mathbf{x}) : (\mathbf{grad} \mathbf{v})(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Finalement, on déduit alors que le triplet (\mathbf{u}, p, T) est solution du problème (1.2.2)–(1.2.3). L'estimation (1.2.8) découle immédiatement de (1.2.13) et (1.2.11).

Afin de montrer l'unicité de la solution du problème (1.2.2)–(1.2.3), on a besoin du lemme suivant.

Lemme 1.2.2

Soient (\mathbf{u}_1, p_1, T_1) et (\mathbf{u}_2, p_2, T_2) deux solutions du problème (1.2.2)–(1.2.3). Avec la notation

$$T = T_1 - T_2, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2,$$

on a

$$-\int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)T_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla)T_2)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla)T_1)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.2.16)$$

Démonstration. En effet, comme T est dans $H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)T_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla)T_2)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= -\int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)T_1)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}) \cdot \nabla)(T_1 - T)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

d'après (1.2.7),

$$-\int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)T_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla)T_2)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla)T_1)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Proposition 1.2.3

On suppose que la fonction v est lipschitzienne et on désigne par v^* la constante de Lipschitz. Il existe deux constantes positives c_{\sharp} et c_b telles que

(i) si les données $(\mathbf{f}, g) \in H^{-1}(\Omega)^d \times H^{-1}(\Omega)$ et $T_b \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, vérifient

$$c_{\sharp} (\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d} + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}) < 1, \quad (1.2.17)$$

(ii) si le problème (1.2.2)–(1.2.3) admet une solution (\mathbf{u}, p, T) tel que \mathbf{u} dans $W^{1,q}(\Omega)^d$ avec $q > 2$ en dimension $d = 2$ et $q \geq 3$ en dimension $d = 3$ et satisfaisant

$$c_b v^* |\mathbf{u}|_{W^{1,q}(\Omega)^d} < 1, \quad (1.2.18)$$

Alors, cette solution est unique.

Démonstration. On pose

$$c_1 = c (\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d} + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}).$$

où c est la constante dans (1.2.8).

Soient (\mathbf{u}_1, p_1, T_1) et (\mathbf{u}_2, p_2, T_2) deux solutions du problème (1.2.2)–(1.2.3) avec \mathbf{u}_1

dans $W^{1,q}(\Omega)^d$ satisfaisant (1.2.18).

On pose

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \quad p = p_1 - p_2 \quad \text{et} \quad T = T_1 - T_2.$$

On procède en trois étapes :

1) Comme T dans $H_0^1(\Omega)$, on utilise la troisième équation du problème (1.2.2)–(1.2.3) pour S égal à T on aura

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Omega} (\mathbf{grad} T_1)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{grad} T)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) T_1)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle g, T \rangle_{\Omega}, \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

et

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Omega} (\mathbf{grad} T_2)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{grad} T)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) T_2)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle g, T \rangle_{\Omega}. \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

En soustrayant (1.2.19) de (1.2.20), on aura

$$\alpha \int_{\Omega} (\mathbf{grad} T)^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) T_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) T_2)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Par conséquent,

$$\alpha |T|_{H^1(\Omega)}^2 = - \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) T_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) T_2)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

or d'après (1.2.16), on aura

$$\begin{aligned} \alpha |T|_{H^1(\Omega)}^2 &= - \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) T_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) T_2)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) T_1)(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \alpha |T|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^d} \|\mathbf{grad} T_1\|_{L^2(\Omega)} \|T\|_{L^4(\Omega)}, \\ \alpha |T|_{H^1(\Omega)} &\leq c_2 \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^d} |T_1|_{H^1(\Omega)}, \\ \alpha |T|_{H^1(\Omega)} &\leq c_1 c_2 \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d}, \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

où c_2 est la constante d'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$.

2) Similairement, on déduit d'après la première équation du problème (1.2.2)–(1.2.3) que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nu(T_1)(\mathbf{x}) (\mathbf{grad} \mathbf{u}_1)(\mathbf{x}) : (\mathbf{grad} \mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{x}) p_1(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}, \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(T_2)(\mathbf{x})(\mathbf{grad}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u})(\mathbf{x}) : (\mathbf{grad} \mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}) \cdot \nabla)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{x}) p_2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}. \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

En prenant \mathbf{v} égal à \mathbf{u} et en soustrayant (1.2.22) de (1.2.23), on obtient pour tout \mathbf{u} dans $V(\Omega)$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(T_1)(\mathbf{x})(\mathbf{grad} \mathbf{u}_1)(\mathbf{x}) : (\mathbf{grad} \mathbf{u})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} \nu(T_2)(\mathbf{x})(\mathbf{grad} \mathbf{u}_1)(\mathbf{x}) : (\mathbf{grad} \mathbf{u})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} \nu(T_2)(\mathbf{x})(\mathbf{grad} \mathbf{u})^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(T_2)(\mathbf{x})(\mathbf{grad} \mathbf{u})^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} (\nu(T_1) - \nu(T_2))(\mathbf{x})(\mathbf{grad} \mathbf{u}_1)(\mathbf{x}) : (\mathbf{grad} \mathbf{u})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, on aura

$$\nu_1 |\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^d}^2 \leq c_1 c_2 |\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^d}^2 + \nu^* c_3 |\mathbf{u}_1|_{W^{1,q}(\Omega)^d} |T|_{H^1(\Omega)} |\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^d},$$

où c_3 est la constante d'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{q^*}(\Omega)$, avec $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = \frac{1}{2}$.

$$|\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^d} \leq \nu_1^{-1} (c_1 c_2 |\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^d} + \nu^* c_3 |\mathbf{u}_1|_{W^{1,q}(\Omega)^d} |T|_{H^1(\Omega)}),$$

d'après (1.2.21), on aura

$$|\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^d} \leq c_1 c_2 \nu_1^{-1} (1 + \nu^* c_3 \alpha^{-1} |\mathbf{u}_1|_{W^{1,q}(\Omega)^d}) |\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)^d}.$$

en choisissant

$$c_{\sharp} = c_2 \nu_1^{-1} \quad \text{et} \quad c_{\flat} = c_1 c_2 \nu_1^{-1} c_3 \alpha^{-1},$$

tel que

$$c_1 c_2 \nu_1^{-1} (1 + \nu^* c_3 \alpha^{-1} |\mathbf{u}_1|_{W^{1,q}(\Omega)^d}) < 1.$$

Nous déduisons que \mathbf{u} est nul et d'après (1.2.21) on aura aussi que T est nul.

3) Finalement, on a pour tout \mathbf{v} dans $H_0^1(\Omega)^d$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu(T_1)(\mathbf{x})(\mathbf{grad} \mathbf{u}_1)(\mathbf{x}) : (\mathbf{grad} \mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{x}) p_1(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nu(T_2)(\mathbf{x})(\mathbf{grad} \mathbf{u}_2)(\mathbf{x}) : (\mathbf{grad} \mathbf{v})(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{x}) p_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}. \end{aligned}$$

Comme la vitesse \mathbf{u}_1 est égale à \mathbf{u}_2 et la température T_1 est égale à T_2 , la pression p vérifie alors

$$- \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d.$$

Et de (1.2.5), nous déduisons qu'elle est nulle. Nous prouvons ainsi l'unicité de la solution (\mathbf{u}, p, T) .

1.2.3 Régularité de la solution

Pour prouver la régularité sur la vitesse et la pression, nous réfèrons à Meyers [30] et à Bernardi, Chacón Rebollo, Hecht et Lawandowski [7, Prop. 3.3]. La régularité sur la température est déduite des propriétés de l'opérateur de Laplace, nous réfèrons à Grisvard [25, Thm 4.3.2.4] et Dauge ([19, Thm 2] et [20, Cor.3.10]).

Proposition 1.2.4

Il existe un nombre réel $q_0 > 2$ dépendant de la géométrie de Ω et de rationnel ν_2/ν_1 et un nombre réel $q_1 > 1$ qui dépend uniquement de la géométrie de Ω tels que, pour tout q , $2 \leq q \leq q_0$, et q' , $1 \leq q' \leq q_1$, et pour toutes données (\mathbf{f}, g) dans l'espace $W^{-1,q}(\Omega)^d \times L^{q'}(\Omega)$ et $T_b \in W^{2-\frac{1}{q'}, q'}(\partial\Omega)$, toute solution (\mathbf{u}, p, T) du problème (1.4)-(1.5) appartient à $W^{1,q}(\Omega)^d \times L^q(\Omega) \times W^{2,q'}(\Omega)$. De plus, q_1 est $\geq \frac{4}{3}$ dans le domaine général Ω et ≥ 2 quand Ω est convexe.

Discrétisation spectrale des équations de Navier-Stokes/chaleur stationnaires

2.1 Introduction

Notre but est de proposer une discrétisation du système (1.1.2) qui soit optimale. Nous nous intéressons donc à l'étude de la discrétisation spectrale des équations présentées dans le chapitre 1. Le domaine Ω est le carré ou le cube $\Omega =]-1, 1[^d$, $d = 2$ ou 3 .

Nous commençons par écrire le problème discret. Nous prouvons qu'il admet une solution localement unique. Puis, nous établissons des estimations *a priori* entre les solutions de problèmes continu et discret. Enfin, nous présentons les outils nécessaires à l'implémentation de la méthode de discrétisation et quelques résultats numériques.

Avant d'écrire notre problème discret, nous rappelons les principaux éléments intervenant dans la discrétisation spectrale : les polynômes orthogonaux, les formules de quadratures et les produits scalaires discrets sur $\Lambda =]-1, 1[$ puis sur le carré $\Omega =]-1, 1[\times]-1, 1[$.

2.2 Outils de la discrétisation

Le paramètre de discrétisation est un entier $N \geq 2$, et c désigne une constante positive, pouvant varier d'une ligne à l'autre mais toujours indépendante de N .

Les méthodes spectrales utilisent l'approximation par les polynômes de haut degré. Nous définissons tout d'abord les espaces discrets correspondants. Une grande partie de l'analyse numérique de ces méthodes fait appel à une base de polynômes orthogonaux dont nous rappelons les principales propriétés. Nous décrivons les formules de quadratures qui sont employées pour évaluer les intégrales intervenant dans la formulation variationnelle. Nous réfèrons à Bernardi, Maday et Rapetti [11, Chapitre II] pour plus de détails sur la méthode spectrale.

2.2.1 Espaces discrets

On définit les espaces de polynômes, tout d'abord en dimension $d = 1$, puis dans des domaines de dimension $d \geq 2$ qui sont produits d'intervalles dont le but est d'utiliser des

bases tensorisées de polynômes.

Notation 2.2.1

Pour tout entier $n \geq 0$, on définit \mathbb{P}_n comme l'espace des polynômes sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} de degré $\leq n$. Pour tout intervalle ouvert borné Λ de \mathbb{R} , on note $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ l'espace des restrictions à Λ des fonctions de l'ensemble \mathbb{P}_n . Lorsque Λ est un intervalle $]a, b[$, on utilise également la notation $\mathbb{P}_n(a, b)$ pour $\mathbb{P}_n(]a, b[)$.

Notation 2.2.2

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout intervalle ouvert borné Λ de \mathbb{R} , on note $\mathbb{P}_n^0(\Lambda)$ l'espace des polynômes de $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ qui s'annulent aux deux extrémités de Λ .

L'introduction de ce dernier espace est bien sûr lié au fait que l'on veut tenir compte des conditions aux limites essentielles dans les problèmes que l'on va discrétiser. En dimension ≥ 2 , on travaille dans des domaines Ω dits tensorisés, c'est-à-dire du type $\Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_d$, où les Λ_i sont des intervalles de \mathbb{R} .

Notation 2.2.3

Pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout domaine Ω de \mathbb{R}^d égal au produit $\Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_d$ d'intervalles ouverts de \mathbb{R} , on note $\mathbb{P}_n(\Omega)$ l'espace des restrictions à Ω des polynômes à valeurs dans \mathbb{R} et de degré $\leq n$ par rapport à chaque variable x_i , $1 \leq i \leq d$.

On en déduit la propriété de tensorisation suivante, qui est à la base de l'analyse numérique et de la mise en œuvre des méthodes spectrales.

Proposition 2.2.1

Soit Ω_d le produit $\Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_d$ d'intervalles ouverts de \mathbb{R} et Ω_{d-1} le produit de $\Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_{d-1}$. Pour tout entier $n \geq 0$ et toute base $\{\varphi_m; 0 \leq m \leq n\}$ de $\mathbb{P}_n(\Lambda_d)$, un polynôme p appartient à $\mathbb{P}_n(\Omega_d)$ si et seulement s'il s'écrit

$$p(x_1, \dots, x_d) = \sum_{m=0}^n q_m(x_1, \dots, x_{d-1}) \varphi_m(x_d), \quad (2.2.1)$$

où les $q_m, 0 \leq m \leq n$, appartiennent à $\mathbb{P}_n(\Omega_{d-1})$.

Considérons pour simplifier le cas où Ω est égal à Λ^d pour un intervalle ouvert Λ de \mathbb{R} . La proposition 2.2.1 est alors équivalente au résultat suivant : pour tout $n \geq 0$ et toute base $\{\varphi_m; 0 \leq m \leq n\}$ de $\mathbb{P}_n(\Lambda)$, les polynômes $\varphi_{m_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{m_d}$ définis par

$$(\varphi_{m_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{m_d})(x_1, \dots, x_d) = \varphi_{m_1}(x_1) \dots \varphi_{m_d}(x_d),$$

forment lorsque chaque m_i décrit les entiers de 0 à n , une base de $\mathbb{P}_n(\Omega)$.

Finalement, pour traiter les problèmes avec conditions aux limites essentielles, on introduit les espaces suivants.

Notation 2.2.4

Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^d égal au produit $\Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_d$ d'intervalles ouverts bornés de \mathbb{R} , on note $\mathbb{P}_n^0(\Omega)$ l'espace des polynômes de $\mathbb{P}_n(\Omega)$ qui s'annulent sur $\partial\Omega$.

Le fait que Ω soit un ouvert tensorisé (c'est-à-dire un produit de d intervalles) mène alors à l'analogue de la Proposition 2.2.1 (on rappelle que, lorsque Ω n'est pas tensorisé, $\mathbb{P}_n^0(\Omega)$ peut être réduit à $\{0\}$; c'est le cas en particulier lorsque $\partial\Omega$ n'est une surface algébrique).

Proposition 2.2.2

Soit Ω_d le produit $\Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_d$ d'intervalles ouverts de \mathbb{R} et Ω_{d-1} le produit de $\Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_{d-1}$. Pour tout entier $n \geq 1$ et toute base $\{\psi_m; 1 \leq m \leq n-1\}$ de $\mathbb{P}_n(\Lambda_d)$, un polynôme p appartient à $\mathbb{P}_n^0(\Omega_d)$ si et seulement s'il s'écrit

$$p(x_1, \dots, x_d) = \sum_{m=1}^{n-1} q_m(x_1, \dots, x_{d-1}) \psi_m(x_d), \quad (2.2.2)$$

où les $q_m, 1 \leq m \leq n-1$, appartiennent à $\mathbb{P}_n(\Omega_{d-1})$.

Là aussi, lorsque Ω est égal à Λ^d pour un intervalle ouvert Λ de \mathbb{R} , pour tout entier $n \geq 0$ et toute base $\{\psi_m; 1 \leq m \leq n-1\}$ de $\mathbb{P}_n^0(\Lambda)$, les polynômes $\psi_{m_1} \otimes \dots \otimes \psi_{m_d}$ définis par

$$(\psi_{m_1} \otimes \dots \otimes \psi_{m_d})(x_1, \dots, x_d) = \psi_{m_1}(x_1) \dots \psi_{m_d}(x_d),$$

forment lorsque chaque m_i décrit les entiers de 1 à $n-1$, une base de $\mathbb{P}_n^0(\Omega)$.

2.2.2 Polynômes orthogonaux dans $L^2(\Lambda)$

Pour tout entier $n \geq 0$, nous définissons \mathbb{P}_n comme l'espace des polynômes sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} de degré $\leq n$. Pour tout intervalle ouvert borné de \mathbb{R} , nous notons $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ l'espace des restrictions à Λ des fonctions de l'espace \mathbb{P}_n .

Les polynômes de Legendre forment une famille de polynômes deux à deux orthogonaux dans l'espace $L^2(\Lambda)$. Chaque polynôme L_n est de degré n et vérifie $L_n(1) = 1$. Pour tout entier positif n , les zéros de polynôme L_n sont réels, distincts et strictement compris entre -1 et 1 .

Nous rappelons les propriétés essentielles pour la discrétisation.

1. Tout polynôme L_n satisfait l'équation différentielle qui est à la base des techniques de discrétisation spectrale :

$$((1-\xi)(1+\xi)L_n'(\xi))' + n(n+1)L_n(\xi) = 0, \quad n \geq 0. \quad (2.2.3)$$

2. Nous avons l'équation intégrale :

$$(2n+1)L_n = L_{n+1}' - L_{n-1}', \quad n \geq 1.$$

3. Le polynôme L_n vérifie :

$$\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \int_{-1}^1 L_n^2(\xi) d\xi = \frac{2}{2n+1}.$$

4. Enfin, la formule de récurrence permet de calculer les polynômes $(L_n)_n$,

$$\begin{cases} L_0 = 1, & L_1(\xi) = \xi, \\ (n+1)L_{n+1}(\xi) = (2n+1)\xi L_n(\xi) - nL_{n-1}(\xi). \end{cases}$$

Il est bien connu que les nœuds et les extremas des polynômes de Legendre servent à la construction de formules de quadrature numériques de grande précision, c'est-à-dire exactes sur un espace de polynômes de degré élevé.

2.2.3 Formule de Gauss-Lobatto

La formule de quadrature la plus naturelle dans le contexte polynomial est la formule de Gauss-Lobatto associée à la mesure de Lebesgue. Cette dernière tient compte des conditions aux bords et contribue, avec la base choisie, à avoir des matrices de masse diagonales. Nous réfèrons à Crouzeix et Mignot [18] et à Davis et Rabinowitz [21] pour l'analyse numérique complète de la formule de Gauss-Lobatto.

Dans la section qui suit, nous rappelons quelques propriétés de la formule de Gauss-Lobatto pour approcher les intégrales sur Λ , qui sont utiles pour la suite.

Définition 2.2.1

Soit N un entier positif fixé. Nous posons $\xi_0 = -1$ et $\xi_N = 1$. Il existe un unique ensemble de $(N-1)$ nœuds ξ_j de Λ , $1 \leq j \leq N-1$, et un unique ensemble de $N+1$ réels ρ_j , $0 \leq j \leq N$, tels que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme Φ de $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$,

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda), \quad \int_{-1}^1 \Phi(\xi) d\xi = \sum_{j=0}^N \Phi(\xi_j) \rho_j. \quad (2.2.4)$$

Les nœuds ξ_j , $1 \leq j \leq N-1$, sont les zéros de L_N' et les poids ρ_j sont données par la formule

$$\rho_j = \frac{2}{N(N+1)L_N^2(\xi_j)}, \quad 0 \leq j \leq N. \quad (2.2.5)$$

Un algorithme efficace pour calculer les nœuds et les poids est donnée dans [11, Chap. I, Section I.4].

Nous introduisons aussi le produit discret

$$(\varphi, \psi)_N = \sum_{j=0}^N \varphi(\xi_j) \psi(\xi_j) \rho_j.$$

Nous rappelons le résultat important de comparaison, qui est donné dans le lemme suivant.

Lemme 2.2.1

Tout polynôme φ_N de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ vérifie les inégalités suivantes :

$$\|\varphi_N\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq (\varphi_N, \varphi_N)_N \leq 3\|\varphi_N\|_{L^2(\Lambda)}^2. \quad (2.2.6)$$

D'après (2.2.6), le produit $(\cdot, \cdot)_N$ est un produit scalaire sur $\mathbb{P}_N(\Lambda)$.

Démonstration. En effet, nous écrivons le polynôme φ_N sous la forme

$$\varphi_N = \sum_{n=0}^N \varphi^n L_n,$$

de sorte que nous avons

$$\|\varphi_N\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \sum_{n=0}^N (\varphi^n)^2 \frac{1}{n + \frac{1}{2}}.$$

En utilisant la propriété d'exactitude (2.2.4), nous avons aussi

$$\sum_{j=0}^N (\varphi^n)^2 (\xi_j) \rho_j = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi^n \frac{1}{n + \frac{1}{2}} + (\varphi^N)^2 \sum_{j=0}^N L_N^2(\xi_j) \rho_j.$$

De l'égalité (2.2.5) et de la Section 2.2.1

$$\sum_{j=0}^N L_N^2(\xi_j) \rho_j = (2 + \frac{1}{N}) \|L_N\|_{L^2(\Lambda)}^2,$$

nous déduisons les inégalités

$$\|L_N\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq \sum_{j=0}^N L_N^2(\xi_j) \rho_j \leq 3\|L_N\|_{L^2(\Lambda)}^2,$$

d'où les inégalités sur le polynôme φ_N .

2.3 Approximation polynomiale

2.3.1 Dans un intervalle Λ

Nous commençons par introduire l'opérateur de projection orthogonale π_N de l'espace $L^2(\Lambda)$ dans l'espace de polynôme $\mathbb{P}_N(\Lambda)$. Cet opérateur est donnée par :

$$\forall \varphi \in L^2(\Lambda), \quad \pi_N \varphi = \sum_{n=0}^N \varphi^n L_n,$$

avec

$$\varphi^n = \frac{1}{\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2} \int_{-1}^1 \varphi(\zeta) L_n(\zeta) d\zeta.$$

Pour cette approximation, nous rappelons le lemme suivant, voir Bernardi, Maday et Rapetti [11, Chap. I, Section I.4].

Lemme 2.3.1

Pour tout $s \geq 0$, il existe une constante positive c telle que pour tout $\varphi \in H^s(\Lambda)$,

$$\|\varphi - \pi_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)} \leq c N^{-s} \|\varphi\|_{H^s(\Lambda)}.$$

2.3.2 Dans un carré

Nous passons maintenant, à l'approximation sur le carré ou le cube $\Omega =]-1, 1[^d$, $d = 2$ ou 3 . Les nœuds d'approximation sont définis par tensorisation : nous commençons par exemple à traiter la variable y comme un paramètre fixe et nous opérons en x , puis nous opérons en y , à partir d'une formule de quadrature sur Λ , c'est-à-dire que leurs coordonnées appartiennent à l'ensemble des nœuds de cette formule. Ceci permet de déduire les propriétés des opérateurs d'approximations en dimension 2 de ceux en dimension 1. Nous définissons maintenant l'opérateur de projection Π_N de $L^2(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$. Cet opérateur est construit par tensorisation. Dans ce qui suit, en dimension $d = 2$, le symbole $^{(x)}$ ou $^{(y)}$ après un opérateur monodimensionnel indiquera que nous faisons agir cet opérateur sur la variable x ou y , respectivement. Alors

$$\Pi_N = \pi_N^{(x)} \circ \pi_N^{(y)}.$$

Dans le théorème ci-dessous nous nous intéressons aux propriétés d'approximation de l'opérateur Π_N .

Théorème 2.3.1

Pour tout $s \geq 0$, il existe une constante c positive ne dépendant que de s telle que, pour toute fonction φ de $H^s(\Omega)$, nous avons

$$\|\varphi - \Pi_N \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq c N^{-s} \|\varphi\|_{H^s(\Omega)}. \quad (2.3.1)$$

Soit aussi Π_N^1 l'opérateur de projection orthogonale de $H^1(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$. Cette définition de Π_N^1 s'écrit de la façon équivalente suivante : pour toute fonction φ de $H^1(\Omega)$, $\Pi_N^1 \varphi$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Omega)$ et vérifie $\forall w_N \in \mathbb{P}_N(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} (\mathbf{grad}(\varphi - \Pi_N^1 \varphi))(x) \cdot (\mathbf{grad} w_N)(x) dx + \int_{\Omega} (\varphi - \Pi_N^1 \varphi)(x) \cdot w_N(x) dx = 0.$$

Comme précédemment, dans le théorème qui suit nous nous intéressons à l'approximation de fonctions de $H^1(\Omega)$ par des polynômes de l'espace $\mathbb{P}_N(\Omega)$.

Théorème 2.3.2

Pour tout entier $s \geq 1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de s telle que, pour toute fonction φ de $H^s(\Omega)$, nous avons

$$\|\varphi - \Pi_N^1 \varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq c N^{1-s} \|\varphi\|_{H^s(\Omega)}. \quad (2.3.2)$$

Nous réfèrons à Bernardi, Maday et Rapetti [11, Chap. III, section 2], pour les démonstrations.

On note $\Pi_N^{1,0}$ l'opérateur de projection orthogonale de $H_0^1(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$ pour le produit scalaire associé à la norme de $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$.

Théorème 2.3.3

Pour tout entier $s \geq 1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de s telle que, pour toute fonction φ de $H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, on ait

$$|\varphi - \Pi_N^{1,0} \varphi|_{H^1(\Omega)} \leq c N^{1-s} \|\varphi\|_{H^s(\Omega)}. \quad (2.3.3)$$

Nous réfèrons aussi à Bernardi, Maday et Rapetti [11, Chap. III, section 2], pour les démonstrations.

Nous introduisons le maillage et le produit scalaire sur le domaine $\overline{\Omega} = [-1, 1]^d$, $d = 2$ ou 3, obtenus par tensorisation à partir de la formule de quadrature (2.2.4) sur Λ . Nous définissons ainsi la grille de Gauss-Lobatto Ξ_N par

$$\Xi_N = \begin{cases} \{\mathbf{x} = (\xi_i, \xi_j); \quad 0 \leq i, j \leq N\} & \text{si } d = 2, \\ \{\mathbf{x} = (\xi_i, \xi_j, \xi_k); \quad 0 \leq i, j, k \leq N\} & \text{si } d = 3. \end{cases}$$

La formule de quadrature sur le carré Ω s'écrit

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \Phi(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j. \quad (2.3.4)$$

Nous introduisons donc une approximation du produit scalaire discret de $L^2(\Omega)$. Nous définissons la forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_N$ sur les fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_N = \begin{cases} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \mathbf{u}(\xi_i, \xi_j) \mathbf{v}(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j & \text{si } d = 2, \\ \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \mathbf{u}(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \mathbf{v}(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \rho_i \rho_j \rho_k & \text{si } d = 3. \end{cases}$$

où les nœuds ξ_j et les poids ρ_j sont introduits dans la Définition 2.2.1.

Une des conséquences de la propriété d'exactitude de la formule de Gauss-Lobatto est que la forme (\cdot, \cdot) coïncide avec le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ lorsqu'elle est appliquée à des fonctions u et v telles que le produit uv appartienne à $\mathbb{P}_{2N-1}(\Omega)$. En outre, nous déduisons de l'inégalité (2.2.6) que l'application :

$$v \mapsto (v, v)_N^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ avec des constantes d'équivalence indépendantes de N .

Le produit discret $(\cdot, \cdot)_N$ est le produit scalaire associé à cette norme sur $\mathbb{P}_N(\Omega) \times \mathbb{P}_N(\Omega)$. Nous utilisons également la notation $(\cdot, \cdot)_N$ pour le même produit appliqué à des champs

de vecteurs : pour toutes fonctions $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$ et $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ continues de $\overline{\Omega}$ dans \mathbb{R}^m ,

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_N = \sum_{p=1}^m (u_p, v_p)_N,$$

d'où d'après (2.2.6), nous avons pour tout $\boldsymbol{\varphi}_N \in \mathbb{P}_N(\Omega)^m$,

$$\|\boldsymbol{\varphi}_N\|_{L^2(\Omega)^m}^2 \leq (\boldsymbol{\varphi}_N, \boldsymbol{\varphi}_N)_N \leq 3^d \|\boldsymbol{\varphi}_N\|_{L^2(\Omega)^m}^2. \quad (2.3.5)$$

2.4 Interpolation polynomiale

Nous introduisons maintenant l'opérateur d'interpolation aux points de Gauss-Lobatto. Son analyse figure dans [28].

2.4.1 Dans un intervalle

Nous notons i_N l'opérateur d'interpolation aux nœuds $(\xi_j)_{j=0, \dots, N}$: pour toute fonction φ continue sur $\overline{\Lambda}$, $i_N \varphi$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ et vérifie

$$(i_N \varphi)(\xi_j) = \varphi(\xi_j), \quad 0 \leq j \leq N.$$

Théorème 2.4.1

Pour tout entier $s \geq 1$, il existe $c > 0$ ne dépendant que de s telle que pour tout $\varphi \in H^s(\Lambda)$,

$$\|\varphi - i_N \varphi\|_{L^2(\Lambda)} \leq c N^{-s} \|\varphi\|_{H^s(\Lambda)}. \quad (2.4.1)$$

Pour plus de détails, voir Bernardi, Maday et Rapetti [11, Chap. IV, Section 1].

2.4.2 Dans un carré

Par tensorisation, nous introduisons l'opérateur d'interpolation I_N sur la grille Ξ_N : pour toute fonction φ continue sur $\overline{\Omega}$, $I_N \varphi$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Omega)$ et vérifie

$$(I_N \varphi)(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Xi_N. \quad (2.4.2)$$

Nous rappelons un résultat qui nous sera utile dans la suite, nous référons à Bernardi et Maday [9, Rem. 13.5],

$$\forall \varphi_M \in \mathbb{P}_M(\Omega), \quad \|I_N \varphi_M\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left(1 + \frac{M}{N}\right)^d \|\varphi_M\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.4.3)$$

Nous rappelons le théorème suivant, voir Bernardi, Maday et Rapetti [11, Chap. IV, Section 2], pour la démonstration.

Théorème 2.4.2

Pour tout $s, s \geq 2$, il existe $c > 0$ ne dépendant que de s telle que, pour tout $\varphi \in H^s(\Omega)$, on ait

$$\|\varphi - I_N \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq c N^{-s} \|\varphi\|_{H^s(\Omega)}. \quad (2.4.4)$$

Nous rappelons aussi le théorème suivant, voir [9, Chap III, Thm 14.2], pour la démonstration.

Théorème 2.4.3

Pour tout r et s satisfaisant $s > r + \frac{(d-1)}{2}$ et $0 \leq r \leq 1$, il existe une constante positive c qui dépend uniquement de s telle que, pour toute fonction v de $H^s(\Omega)^d$, on ait

$$\|v - I_N v\|_{H^r(\Omega)^d} \leq c N^{r-s} \|v\|_{H^s(\Omega)^d}. \quad (2.4.5)$$

Soit $\Gamma_j, 1 \leq j \leq 2d$, les côtés ($d = 2$) ou faces ($d = 3$) du domaine Ω . Comme les traces sur chaque Γ_j de polynômes dans $\mathbb{P}_N(\Omega)$ appartiennent à $\mathbb{P}_N(\Gamma_j)$, nous devons, pour discrétiser la condition aux limites, introduire une approximation de T_b dans l'espace

$$X_N^{\partial\Omega} = \{\varphi_N \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega); \varphi_N|_{\Gamma_j} \in \mathbb{P}_N(\Gamma_j), 1 \leq j \leq 2d\}.$$

Comme précédemment nous définissons aussi l'opérateur $i_N^{\partial\Omega}$ d'interpolation de Lagrange aux points de $\Xi_N \cap \bar{\Gamma}_j$: pour toute fonction φ continu sur $\partial\Omega$, $i_N^{\partial\Omega}$ appartient à $X_N^{\partial\Omega}$ et vérifie

$$(i_N^{\partial\Omega} \varphi)(x) = \varphi(x), x \in \Xi_N \cap \bar{\Gamma}_j, 1 \leq j \leq 2d. \quad (2.4.6)$$

2.5 Le problème discret

Comme il a été déjà dit dans l'introduction, pour la discrétisation on utilise la méthode $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$. Comme son nom indique, cette méthode consiste à chercher la vitesse dans l'espace des polynômes $\mathbb{P}_N^0(\Omega)^d$ et la pression dans $\mathbb{P}_{N-2}(\Omega)$ ce qui permet, entre autres, d'éviter les modes parasites. Pour écrire notre formulation variationnelle, nous commençons par introduire les espaces discrets suivants

$$\mathbb{X}_N = \mathbb{P}_N^0(\Omega)^d, \mathbb{M}_N = \mathbb{P}_{N-2}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \mathbb{Y}_N = \mathbb{P}_N(\Omega) \text{ et } \mathbb{Y}_N^0 = \mathbb{Y}_N \cap H_0^1(\Omega).$$

où $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$ est l'espace des polynômes de $\mathbb{P}_N(\Omega)$ qui s'annulent sur $\partial\Omega$.

Nous supposons que les données f, g sont continues sur $\bar{\Omega}$ et T_b continue sur $\partial\bar{\Omega}$. Le problème discret est construit à partir de la formulation variationnelle continue par la méthode de Galerkin avec intégration numérique. Le problème discret s'écrit alors Trouver $(u_N, p_N, T_N) \in \mathbb{X}_N \times \mathbb{M}_N \times \mathbb{Y}_N$ tel que :

$$T_N = i_N^{\partial\Omega} T_b \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (2.5.1)$$

et tel que,

$$\begin{aligned} \forall v_N \in \mathbb{X}_N, \quad & (v(T_N) \mathbf{grad} u_N, \mathbf{grad} v_N)_N + ((u_N \cdot \nabla) u_N, v_N)_N \\ & - (\operatorname{div} v_N, p_N)_N = (f, v_N)_N, \\ \forall q_N \in \mathbb{M}_N, \quad & -(\operatorname{div} u_N, q_N)_N = 0, \\ \forall S_N \in \mathbb{Y}_N^0, \quad & \alpha(\mathbf{grad} T_N, \mathbf{grad} S_N)_N + ((u_N \cdot \nabla) T_N, S_N)_N = (g, S_N)_N. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

L'existence d'une solution (u_N, T_N) du problème discret (2.5.1)–(2.5.2) peut être obtenue par les mêmes arguments que dans le premier chapitre, mais nous préférons suivre l'approche de Brezzi, Rappaz et Raviart [13] pour obtenir directement des résultats plus précis.

2.6 Estimation de l'erreur

Nous allons maintenant prouver une estimation d'erreur entre les solutions des problèmes (2.5.1)–(2.5.2) et (1.2.2)–(1.2.3). La preuve de ce résultat se base sur le théorème dû à Brezzi, Rappaz et Raviart [13]. On écrit ces deux problèmes d'une autre manière pour se servir des résultats montrés pour les équations de Stokes. Pour cela, pour toute fonction θ sur Ω , on introduit l'opérateur de Stokes $\mathcal{S}(\theta)$ et $\tilde{\mathcal{S}}(\theta)$ définis par :

Pour toute fonction \mathbf{F} dans l'espace $H^{-1}(\Omega)^d$, $\mathcal{S}(\theta)\mathbf{F}$ est égal à la solution \mathbf{u} et $\tilde{\mathcal{S}}(\theta)\mathbf{F}$ est égal à la solution p où \mathbf{u} et p sont choisies telles que (\mathbf{u}, p) soit solution du problème de Stokes

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nu(\theta)\nabla\mathbf{u}) + \mathbf{grad} p = \mathbf{F} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.6.1)$$

On introduit aussi l'opérateur de Laplace inverse \mathcal{L} défini par : pour toutes données (G, T_b) dans $H^{-1}(\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $\mathcal{L}(G, T_b)$ désigne la solution T du ce problème

$$\begin{cases} -\alpha \Delta T = G & \text{dans } \Omega, \\ T = T_b & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.6.2)$$

En posant $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ T \end{pmatrix}$, le problème (1.2.2)–(1.2.3) est donc équivalent au problème suivant :

Trouver $(\mathbf{u}, T) \in H_0^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$ tel que

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{U} + \begin{pmatrix} \mathcal{S}(T) & 0 \\ 0 & \mathcal{L} \end{pmatrix} \mathcal{G}(\mathbf{U}) = 0, \quad (2.6.3)$$

avec $\mathcal{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mathbf{f} \\ ((\mathbf{u} \cdot \nabla)T - g, T_b) \end{pmatrix}.$

Similairement, on introduit l'opérateur de Stokes discret $\mathcal{S}_N(\theta)$ et $\tilde{\mathcal{S}}_N(\theta)$ définis par : pour toute donnée \mathbf{F} dans l'espace $H^{-1}(\Omega)^d$, $\mathcal{S}_N(\theta)\mathbf{F}$ est égal à la solution \mathbf{u}_N et $\tilde{\mathcal{S}}_N(\theta)\mathbf{F}$ est égal à la solution p_N où \mathbf{u}_N et p_N sont choisies telles que (\mathbf{u}_N, p_N) dans $\mathbb{X}_N \times \mathbb{M}_N$ soit la solution du problème de Stokes suivant :

Trouver $(\mathbf{u}_N, p_N) \in \mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$ tel que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, \quad & (\nu(\theta)\nabla\mathbf{u}_N, \nabla\mathbf{v}_N)_N - (\operatorname{div}\mathbf{v}_N, p_N)_N = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v}_N \rangle_\Omega, \\ \forall q_N \in \mathbb{M}_N, \quad & -(\operatorname{div}\mathbf{u}_N, q_N)_N = 0. \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

On note finalement \mathcal{L}_N l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N : \quad H^{-1}(\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) & \longrightarrow \mathbb{Y}_N \\ (G, T_b) & \longmapsto T_N \end{aligned}$$

où la solution T_N satisfait

$$\begin{aligned} T_N &= i_N^{\partial\Omega} T_b \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \forall S_N \in \mathbb{Y}_N^0, \quad \alpha(\mathbf{grad} T_N, \mathbf{grad} S_N)_N &= \langle G, S_N \rangle_\Omega. \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

En notant $U_N = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_N \\ T_N \end{pmatrix}$, le problème discret (2.5.1)–(2.5.2) peut être écrit d'une manière équivalente comme suit :

Trouver $(\mathbf{u}_N, T_N) \in \mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$ tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N(U_N) &= U_N + \begin{pmatrix} S_N(T_N) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_N \end{pmatrix} \mathcal{G}_N(U_N) = 0, \\ \text{avec} \quad \mathcal{G}_N(U_N) &= \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{N1} \\ (\mathcal{G}_{N2}, T_b) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

Les deux composantes \mathcal{G}_{N1} et \mathcal{G}_{N2} sont définies dans l'espace dual de \mathbb{X}_N et \mathbb{Y}_N^0 , respectivement, par

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, \quad \int_{\Omega} \mathcal{G}_{N1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_N(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N - \mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N, \\ \forall S_N \in \mathbb{Y}_N^0, \quad \int_{\Omega} \mathcal{G}_{N2}(\mathbf{x}) \cdot S_N(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) T_N - g, S_N)_N. \end{aligned}$$

En vue de montrer quelques propriétés sur l'opérateur de Stokes, pour simplifier l'étude, pour toute fonction θ sur Ω on pose :

$$a_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} v(\theta)(\mathbf{grad} \mathbf{u})(\mathbf{x}) : (\mathbf{grad} \mathbf{v})(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

et

$$b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

On aura les deux problèmes suivants, le problème (2.6.1) s'écrit

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, & a_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle_\Omega, \\ \forall q \in L_0^2(\Omega), & b(\mathbf{u}, q) = 0, \end{cases} \quad (2.6.7)$$

et le problème (2.6.4) s'écrit

Trouver $(\mathbf{u}_N, p_N) \in \mathbb{X}_N \times \mathbb{M}_N$ tel que

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, & a_{\theta N}(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) + b_N(\mathbf{v}_N, p_N) = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v}_N \rangle_\Omega, \\ \forall q_N \in \mathbb{P}_{N-2}(\Omega), & b_N(\mathbf{u}_N, q_N) = 0. \end{cases} \quad (2.6.8)$$

Où les formes $a_{\theta N}(\cdot, \cdot)$ et $b_N(\cdot, \cdot)$ sont données par :

$$a_{\theta N}(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) = (\nu(\theta) \mathbf{grad} \mathbf{u}_N, \mathbf{grad} \mathbf{v}_N)_N,$$

$$b_N(\mathbf{v}_N, q_N) = -(\operatorname{div} \mathbf{v}_N, q_N)_N.$$

Les propriétés de la forme $a_{\theta N}(\cdot, \cdot)$ sont établies dans la proposition suivante.

Proposition 2.6.1

La forme $a_{\theta N}(\cdot, \cdot)$ satisfait les propriétés de continuité :

$$\forall \mathbf{u}_N \in \mathbb{X}_N, \forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, a_{\theta N}(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) \leq c \nu_2 \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}, \quad (2.6.9)$$

et d'ellipticité

$$\forall \mathbf{u}_N \in \mathbb{X}_N, a_{\theta N}(\mathbf{u}_N, \mathbf{u}_N) \geq c \nu_1 \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d}^2. \quad (2.6.10)$$

Les propriétés sur la forme $b_N(\cdot, \cdot)$ sont prouvées dans la proposition qui suit :

Proposition 2.6.2

La forme $b_N(\cdot, \cdot)$ satisfait la propriété de continuité :

$$\forall \mathbf{u}_N \in \mathbb{X}_N, \forall q_N \in \mathbb{M}_N, b_N(\mathbf{u}_N, q_N) \leq c \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} \|q_N\|_{L^2(\Omega)},$$

et la condition inf-sup : il existe une constante $\beta > 0$ telle que,

$$\forall q_N \in \mathbb{M}_N, \sup_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{b_N(\mathbf{u}_N, q_N)}{\|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}} \geq \beta N^{-(d-1)/2} \|q_N\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.6.11)$$

Nous réfèrons à Bernardi et Maday, voir [9, Chap.V, Thm 25.7] pour la démonstration de la condition inf-sup.

2.6.1 Estimation *a priori* de l'erreur pour le problème de Stokes

Estimation d'erreur sur la vitesse

On se propose dans cette partie d'estimer l'erreur commise entre la solution (\mathbf{u}, p) du problème (2.6.7) et (\mathbf{u}_N, p_N) du problème (2.6.8).

Afin de montrer le théorème suivant, on a besoin de définir l'espace discret suivant

$$\mathbb{H}_N = \left\{ \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N; \forall q_N \in \mathbb{P}_{N-2}(\Omega), b_N(\mathbf{v}_N, q_N) = 0 \right\}.$$

Théorème 2.6.1

On suppose que la solution (\mathbf{u}, p) du problème (2.6.7) appartient à $H^s(\Omega)^d \times H^{s-1}(\Omega)$ pour un entier $s \geq 1$. Alors, pour le problème discret (2.6.8), on a la majoration d'erreur

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} \leq c (N^{1-s} (\|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} + \|p\|_{H^{s-1}(\Omega)})). \quad (2.6.12)$$

Démonstration. Grâce à l'ellipticité de la forme $a_{\theta N}(\cdot, \cdot)$ on a, pour tout \mathbf{v}_N dans $\mathbb{X}_{N-1} \cap \mathbb{H}_N$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}^2 &\leq c a_{\theta N}(\mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N, \mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N) \\ &= c \left(\langle \mathbf{F}, \mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N \rangle_{\Omega} - a_{\theta N}(\mathbf{v}_N, \mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N) \right) \end{aligned}$$

On utilise alors (2.6.7)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}^2 &\leq c \left(a_{\theta}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N) + b(\mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N, p) - \langle \mathbf{F}, \mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N \rangle_{\Omega} \right. \\ &\quad \left. - a_{\theta}(\mathbf{v}_N, \mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N) + a_{\theta}(\mathbf{v}_N, \mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N) \right. \\ &\quad \left. + \langle \mathbf{F}, \mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N \rangle_{\Omega} - a_{\theta N}(\mathbf{v}_N, \mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N) \right) \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}^2 \leq c \left(a_{\theta}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_N, \mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N) + (a_{\theta} - a_{\theta N})(\mathbf{v}_N, \mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N) + b(\mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N, p) \right)$$

On introduit un polynôme quelconque q_N de $\mathbb{P}_{N-2}(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}^2 &\leq c \left(a_{\theta}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_N, \mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N) + (a_{\theta} - a_{\theta N})(\mathbf{v}_N, \mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N) \right. \\ &\quad \left. + b(\mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N, p - q_N) + (b - b_N)(\mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N, q_N) \right) \end{aligned}$$

D'après la formule (2.3.4), les deux formes bilinéaires $b(\cdot, \cdot)$ et $b_N(\cdot, \cdot)$ coïncident, on en déduit,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_N - \mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d} &\leq c \left(\inf_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{H}_N \cap \mathbb{X}_{N-1}} \left\{ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d} + \sup_{\mathbf{w}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{(a_{\theta} - a_{\theta N})(\mathbf{v}_N, \mathbf{w}_N)}{\|\mathbf{w}_N\|_{H^1(\Omega)^d}} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \inf_{q_N \in \mathbb{P}_{N-2}(\Omega)} \|p - q_N\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Pour estimer le second terme on choisit \mathbf{v}_N comme une fonction de \mathbb{X}_{N-1} à divergence nulle, de sorte que la propriété d'exactitude de la formule de quadrature (2.3.4) implique

$$\forall \mathbf{w}_N \in \mathbb{X}_N, \quad a_{\theta N}(\mathbf{v}_N, \mathbf{w}_N) = a_{\theta}(\mathbf{v}_N, \mathbf{w}_N).$$

Pour estimer le troisième terme on choisit $q_N = \Pi_{N-2}p$ où Π_{N-2} est l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_{N-2}(\Omega)$.

Grâce à l'inégalité triangulaire, on conclut que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} \leq c \left(\inf_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{H}_N \cap \mathbb{X}_{N-1}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d} + \|p - \Pi_{N-2}p\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Pour estimer les deux quantités suivantes

$$\inf_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{H}_N \cap \mathbb{X}_{N-1}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d} \quad \text{et} \quad \|p - \Pi_{N-2}p\|_{L^2(\Omega)}$$

Pour estimer le premier terme, comme c'est un travail déjà fait dans Bernardi et Maday [9, Chap.V, Thm 24.3] on rappelle directement le résultat suivant :

Pour un entier $s \geq 1$, il existe une constante c positive telle que pour toute fonction \mathbf{u} de $H^s(\Omega)^d \cap H_0^1(\Omega)^d$, on ait

$$\inf_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{H}_N \cap \mathbb{X}_{N-1}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d} \leq c N^{1-s} \|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} \quad (2.6.13)$$

Pour estimer le deuxième terme, il suffit d'utiliser (2.3.1). En combinant tous les résultats trouvés, on déduit le résultat désiré.

2.6.2 Estimation *a priori* de l'erreur pour le problème de Laplace

Estimation d'erreur sur la température

On se propose dans cette partie d'estimer l'erreur commise entre la solution T du problème (2.6.2) et T_N du problème (2.6.5).

Théorème 2.6.2

On suppose que la solution T du problème (2.6.2) appartient à $H^s(\Omega)$ et la donnée T_b à $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, pour un entier $s \geq 1$. Alors, pour le problème discret (2.6.5), on a la majoration d'erreur

$$\|T - T_N\|_{H^1(\Omega)} \leq c N^{1-s} (\|T\|_{H^s(\Omega)} + \|T_b\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}). \quad (2.6.14)$$

Il résulte alors des Théorèmes 2.6.1 et 2.6.2 les propriétés suivantes sur l'opérateur de Stokes discret \mathcal{S}_N .

Lemme 2.6.1

- (i) L'opérateur \mathcal{S}_N satisfait la propriété de stabilité, pour toute donnée \mathbf{F} dans $H^{-1}(\Omega)^d$:

$$\|\mathcal{S}_N(\theta)\mathbf{F}\|_{H^1(\Omega)^d} \leq c \|\mathbf{F}\|_{H^{-1}(\Omega)^d}, \quad (2.6.15)$$

- (ii) L'estimation d'erreur suivante est vérifiée pour toute donnée \mathbf{F} telle que $\mathcal{S}(\theta)\mathbf{F}$ dans $H^s(\Omega)^d$ et $\tilde{\mathcal{S}}(\theta)\mathbf{F}$ est dans $H^{s-1}(\Omega)$, $s \geq 1$:

$$\|(\mathcal{S}(\theta) - \mathcal{S}_N(\theta))\mathbf{F}\|_{H^1(\Omega)^d} \leq c N^{1-s} \left(\|\mathcal{S}(\theta)\mathbf{F}\|_{H^s(\Omega)^d} + \|\tilde{\mathcal{S}}(\theta)\mathbf{F}\|_{H^{s-1}(\Omega)} \right). \quad (2.6.16)$$

• Sur l'opérateur de Laplace discret \mathcal{L}_N :

Lemme 2.6.2

- (i) Pour tout G dans $H^{-1}(\Omega)$, l'opérateur \mathcal{L}_N satisfait la propriété de stabilité :

$$\|\mathcal{L}_N(G, 0)\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|G\|_{H^{-1}(\Omega)}. \quad (2.6.17)$$

- (ii) Si de plus $\mathcal{L}G$ appartient à $H^s(\Omega)^d$, $s \geq 1$ et T_b à $H^\sigma(\partial\Omega)$ pour un entier σ , $\sigma > \frac{d-1}{2}$, on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_N)(G, T_b)\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(N^{1-s} \|\mathcal{L}G\|_{H^s(\Omega)} + N^{\frac{1}{2}-\sigma} \|T_b\|_{H^\sigma(\partial\Omega)} \right). \quad (2.6.18)$$

Lemme 2.6.3

On note que ces propriétés donne le résultat de convergence suivant, pour tout F dans $H^{-1}(\Omega)^d$ et pour tout G dans $H^{-1}(\Omega)$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|(\mathcal{S}(\theta) - \mathcal{S}_N(\theta))F\|_{H^1(\Omega)^d} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_N)(G, 0)\|_{H^1(\Omega)} = 0. \quad (2.6.19)$$

La formulation (2.6.3) permet d'étudier les problèmes (1.2.2)–(1.2.3) et (2.5.1)–(2.5.2) en utilisant le théorème des fonctions implicites discrets (F. Brezzi, J. Rappaz et P.-A. Raviart [13]), que l'on rappelle :

Théorème 2.6.3

Soit X un espace de Banach de norme $\|\cdot\|_X$. À toute valeur d'un paramètre h , on associe une application F_h de classe \mathcal{C}^1 de X dans lui-même et on se donne un point u_h^* de X tel que $DF_h(u_h^*)$ soit un isomorphisme de X dans lui-même. On introduit aussi les quantités

$$\eta_h = \|F_h(u_h^*)\|_X,$$

$$\gamma_h = \|(DF_h(u_h^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)},$$

$$L_h(\alpha) = \sup\{\|(DF_h(w) - DF_h(u_h^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}; w \in X \text{ et } \|w - u_h^*\|_X \leq \alpha\}.$$

Si on a

$$2\gamma_h L_h(2\gamma_h \eta_h) < 1,$$

pour tout $\alpha \geq 2\gamma_h \eta_h$ tel que $\gamma_h L_h(\alpha)$ soit < 1 , il existe une unique solution u_h de l'équation $F_h(u_h) = 0$ vérifiant

$$\|u_h - u_h^*\|_X \leq \alpha.$$

De plus, on a l'estimation

$$\|u_h - u_h^*\|_X \leq \frac{\gamma_h}{1 - \gamma_h L_h(\alpha)} \|F_h(u_h^*)\|_X.$$

Compte-tenu des lemmes qui suivent, nous sommes amenés à faire des hypothèses sur la solution (\mathbf{u}, p, T) du problème (1.2.2)–(1.2.3). À partir de maintenant on désigne par $\mathcal{X}_N(\Omega)$ le produit de $\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$ et par $\mathcal{X}(\Omega)$ le produit de $H_0^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$. On note \mathcal{E} l'espace des endomorphismes de $\mathcal{X}(\Omega)$.

Hypothèses 2.6.1 La solution (\mathbf{u}, p, T) du problème (1.2.2)–(1.2.3) satisfait :

(i) Le couple $\mathcal{U} = (\mathbf{u}, T)$ est tel que l'application $\mathcal{U} \mapsto D\mathcal{F}(\mathcal{U})$ est un isomorphisme de $\mathcal{X}(\Omega)$ où D désigne l'opérateur différentiel.

(ii) La vitesse \mathbf{u} appartient à $H^0(\Omega)^d$ et la température T appartient à $H^0(\Omega)$, pour tout $\rho \geq 1$.

Pour des raisons techniques, on introduit une approximation $U_N^\diamond = (\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond)$ de U dans $\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$ qui satisfait pour $0 \leq t \leq \rho$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N^\diamond\|_{H^t(\Omega)^d} &\leq c N^{t-\rho} \|\mathbf{u}\|_{H^\rho(\Omega)^d}, \\ \|T - T_N^\diamond\|_{H^{t+1}(\Omega)} &\leq c N^{t-\rho} \|T\|_{H^{\rho+1}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

Nous référons à Bernardi, Maday et Rapetti, voir [11, Chap. III, Th. 2.4] pour l'existence de $(\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond)$.

On commence par des résultats préliminaires qui sont utiles ultérieurement :

Lemme 2.6.4

On suppose que la donnée \mathbf{f} appartienne à $H^\sigma(\Omega)^d$, $\sigma > \frac{d}{2}$, on a l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_1(\mathbf{u}_N) - \mathcal{G}_{N1}(\mathbf{u}_N), \mathbf{v}_N \rangle \\ \leq c (N^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d}^2 + N^{-\sigma} \|\mathbf{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^d}) \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}, \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

avec

$$\langle \mathcal{G}_1(\mathbf{u}_N), \mathbf{v}_N \rangle = ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N - \mathbf{f}, \mathbf{v}_N).$$

Démonstration. On a,

$$\langle \mathcal{G}_1(\mathbf{u}_N) - \mathcal{G}_{N1}(\mathbf{u}_N), \mathbf{v}_N \rangle = ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N - \mathbf{f}, \mathbf{v}_N) - ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N - \mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N \quad (2.6.22)$$

Soit N' la partie entière de $\frac{N-1}{2}$, on introduit une approximation $\mathbf{u}_{N'}$ de \mathbf{u}_N dans $\mathbb{P}_{N'}(\Omega)^d$. Nous déduisons de la propriété d'exactitude de la formule de quadrature (2.3.4), que

$$((\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'}, \mathbf{v}_N) = ((\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'}, \mathbf{v}_N)_N.$$

En insérant cette égalité dans (2.6.22), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_1(\mathbf{u}_N) - \mathcal{G}_{N1}(\mathbf{u}_N), \mathbf{v}_N \rangle &= ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N - (\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'}, \mathbf{v}_N) \\ &\quad + ((\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'} - (\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N \\ &\quad - ((\mathbf{f}, \mathbf{v}_N) - (I_N \mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N). \end{aligned} \quad (2.6.23)$$

• Pour estimer le premier terme, on a

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N - (\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'}, \mathbf{v}_N) &= ((\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N'}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N \\ &\quad + ((\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla) (\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N'}), \mathbf{v}_N), \end{aligned} \quad (2.6.24)$$

par définition,

$$((\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d (\mathbf{u}_{Ni} - \mathbf{u}_{N'i})(\mathbf{x}) \mathbf{v}_{Nj}(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{u}_{Nj}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

en utilisant dans un premier temps l'inégalité de Hölder puis les injections de Sobolev (voir [1]),

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) &\leq \|\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N'}\|_{L^3(\Omega)^d} \|\mathbf{v}_N\|_{L^6(\Omega)^d} \|\nabla \mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)^d}, \\ &\leq c \|\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N'}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)^d} \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d}, \end{aligned}$$

on conclut en appliquant la formule (2.6.20) pour $t = \frac{1}{2}$ et $\rho = 1$, on déduit que

$$((\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) \leq c N^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d}^2 \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}. \quad (2.6.25)$$

Pour estimer le deuxième terme à droite dans (2.6.24), on a

$$((\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N'}), \mathbf{v}_N) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \mathbf{u}_{N'i}(\mathbf{x}) \nabla(\mathbf{u}_{Ni} - \mathbf{u}_{N'i})(\mathbf{x}) \mathbf{v}_{Nj}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

en utilisant l'inégalité de Hölder

$$((\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N'}), \mathbf{v}_N) \leq \|\mathbf{u}_{N'}\|_{L^4(\Omega)^d} \|\nabla(\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N'})\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{v}_N\|_{L^4(\Omega)^d},$$

en utilisant le fait que $H^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^4(\Omega)$ et par une inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N'}), \mathbf{v}_N) \\ \leq c(\|\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N'}\|_{H^1(\Omega)^d} + \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d}) \|\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N'}\|_{H^1(\Omega)^d} \|\mathbf{v}_N\|_{L^4(\Omega)^d}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N'}), \mathbf{v}_N) \\ \leq c(\|\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N'}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N'}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)^d}) \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}, \end{aligned}$$

en appliquant la formule (2.6.20) pour $t = \frac{1}{2}$ et $\rho = 1$, on déduit que

$$((\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_{N'}), \mathbf{v}_N) \leq c N^{-\frac{3}{2}} \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d}^2 \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}. \quad (2.6.26)$$

En insérant (2.6.25) et (2.6.26) dans (2.6.24), on obtient

$$((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N - (\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'}, \mathbf{v}_N) \leq c N^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d}^2 \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}. \quad (2.6.27)$$

• De même, le deuxième terme dans (2.6.23) s'écrit

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'} - (\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N &= ((\mathbf{u}_{N'} - \mathbf{u}_N) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'}, \mathbf{v}_N)_N \\ &\quad + ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla)(\mathbf{u}_{N'} - \mathbf{u}_N), \mathbf{v}_N)_N. \end{aligned} \quad (2.6.28)$$

Par définition on a,

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_{N'} - \mathbf{u}_N) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'}, \mathbf{v}_N)_N &= \sum_{i,j=1}^d \left((\mathbf{u}_{N'j} - \mathbf{u}_{Nj}) \frac{\partial \mathbf{u}_{N'i}}{\partial x_j}, \mathbf{v}_{Ni} \right)_N, \\ &= \sum_{i,j=1}^d \left((\mathbf{u}_{N'j} - \mathbf{u}_{Nj}) \mathbf{v}_{Ni}, \frac{\partial \mathbf{u}_{N'i}}{\partial x_j} \right)_N. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de l'opérateur d'interpolation I_N , voir (2.4.2)

$$((\mathbf{u}_{N'} - \mathbf{u}_N) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'}, \mathbf{v}_N)_N = \sum_{i,j=1}^d \left(I_N((\mathbf{u}_{N'j} - \mathbf{u}_{Nj}) \mathbf{v}_{Ni}), \frac{\partial \mathbf{u}_{N'i}}{\partial x_j} \right)_N$$

D'après la formule (2.3.5), on obtient

$$((\mathbf{u}_{N'} - \mathbf{u}_N) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'}, \mathbf{v}_N)_N \leq c \sum_{i,j=1}^d \|I_N((\mathbf{u}_{N'} - \mathbf{u}_N) \mathbf{v}_{Ni})\|_{L^2(\Omega)^d} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}_{N'}^i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d}$$

En utilisant la propriété de stabilité de l'opérateur d'interpolation (2.4.3) pour M égal à $2N$, on obtient

$$((\mathbf{u}_{N'} - \mathbf{u}_N) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'}, \mathbf{v}_N)_N \leq c \sum_{i,j=1}^d \|\mathbf{u}_{N'} - \mathbf{u}_N\|_{L^4(\Omega)^d} \|\mathbf{v}_{Ni}\|_{L^4(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_{N'}^i - \mathbf{u}_{Ni}\|_{H^1(\Omega)^d}$$

En notant que $H^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^4(\Omega)$ et par une inégalité triangulaire on aura,

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_{N'} - \mathbf{u}_N) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'}, \mathbf{v}_N)_N &\leq c \sum_{i,j=1}^d \left(\|\mathbf{u}_{N'} - \mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_{N'}^i - \mathbf{u}_{Ni}\|_{H^1(\Omega)^d} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{u}_{N'}\|_{H^1(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_{N'}^i - \mathbf{u}_{Ni}\|_{H^1(\Omega)^d} \right) \|\mathbf{v}_{Ni}\|_{H^1(\Omega)^d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_{N'} - \mathbf{u}_N) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'}, \mathbf{v}_N)_N &\leq c \left(\|\mathbf{u}_{N'} - \mathbf{u}_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_{N'} - \mathbf{u}_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)^d} \right) \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d} \end{aligned}$$

On conclut en appliquant la formule (2.6.20) pour $t = \frac{1}{2}$ et $\rho = 1$, on déduit que

$$((\mathbf{u}_{N'} - \mathbf{u}_N) \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'}, \mathbf{v}_N)_N \leq c N^{-\frac{3}{2}} \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d}^2 \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}. \quad (2.6.29)$$

Evaluons maintenant le deuxième terme de (2.6.28), pour cela on a

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla)(\mathbf{u}_{N'} - \mathbf{u}_N), \mathbf{v}_N)_N &= \sum_{i,j=1}^d \left(\mathbf{u}_{Nj} \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{u}_{N'}^i - \mathbf{u}_{Ni}), \mathbf{v}_{Ni} \right)_N, \\ &= \sum_{i,j=1}^d \left(\mathbf{u}_{Nj} \mathbf{v}_{Ni}, \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{u}_{N'}^i - \mathbf{u}_{Ni}) \right)_N. \end{aligned}$$

Par la définition de l'opérateur d'interpolation (2.4.2),

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla)(\mathbf{u}_{N'} - \mathbf{u}_N), \mathbf{v}_N)_N &= \sum_{i,j=1}^d \left(I_N(\mathbf{u}_{Nj} \mathbf{v}_{Ni}), \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{u}_{N'}^i - \mathbf{u}_{Ni}) \right)_N, \\ &\leq \sum_{i,j=1}^d \|I_N(\mathbf{u}_{Nj} \mathbf{v}_{Ni})\|_{L^2(\Omega)^d} \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{u}_{N'}^i - \mathbf{u}_{Ni}) \right\|_{L^2(\Omega)^d}, \\ &\leq c \left(\sum_{i,j=1}^d \|\mathbf{u}_{Nj}\|_{L^4(\Omega)^d} \|\mathbf{v}_{Ni}\|_{L^4(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_{N'}^i - \mathbf{u}_{Ni}\|_{H^1(\Omega)^d} \right), \\ &\leq c \left(\sum_{i,j=1}^d \|\mathbf{u}_{Nj}\|_{H^1(\Omega)^d} \|\mathbf{v}_{Ni}\|_{H^1(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_{N'}^i - \mathbf{u}_{Ni}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)^d} \right). \end{aligned}$$

On conclut en appliquant la formule (2.6.20) pour $t = \frac{1}{2}$ et $\rho = 1$, on déduit que

$$((\mathbf{u}_N \cdot \nabla)(\mathbf{u}_{N'} - \mathbf{u}_N), \mathbf{v}_N)_N \leq c N^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d}^2 \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}. \quad (2.6.30)$$

En insérant (2.6.29) et (2.6.30) dans (2.6.28), on obtient

$$((\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{N'} - (\mathbf{u}_N \cdot \nabla)\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N \leq c N^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}. \quad (2.6.31)$$

• Pour majorer le dernier terme dans (2.6.23), on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}, \mathbf{v}_N) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N &= \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_N(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{f} - \Pi_{N-1} \mathbf{f})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_N(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - (\mathbf{f} - \Pi_{N-1} \mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N \end{aligned}$$

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v}_N) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N \leq (\|\mathbf{f} - \Pi_{N-1} \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d} + 3^d \|I_N \mathbf{f} - \Pi_{N-1} \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d}) \|\mathbf{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}$$

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v}_N) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N \leq c (\|\mathbf{f} - I_N \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{f} - \Pi_{N-1} \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d}) \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}$$

En utilisant (2.3.1) et (2.4.5) on obtient :

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v}_N) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N \leq c N^{-\sigma} \|\mathbf{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^d} \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d} \quad (2.6.32)$$

Il suffit d'insérer (2.6.27), (2.6.31) et (2.6.32) dans (2.6.23) pour avoir l'inégalité souhaitée et achever la démonstration.

Lemme 2.6.5

Il existe une constante $c > 0$ telle que la propriété de continuité suivante soit vérifiée

$$\langle \mathcal{G}_{N1}(\mathbf{u}_N), \mathbf{v}_N \rangle \leq c (\|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d}^2 + \|I_N \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d}) \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d} \quad (2.6.33)$$

Démonstration. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_{N1}(\mathbf{u}_N), \mathbf{v}_N \rangle &= \sum_{i,j=1}^d (\mathbf{u}_{Nj} \frac{\partial \mathbf{u}_{Ni}}{\partial x_j} - \mathbf{f}, \mathbf{v}_{Ni})_N, \\ &= \sum_{i,j=1}^d \left((\mathbf{u}_{Nj} \mathbf{v}_{Ni}, \frac{\partial \mathbf{u}_{Ni}}{\partial x_j})_N - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_{Ni})_N \right). \end{aligned}$$

Par définition de l'opérateur d'interpolation I_N

$$\langle \mathcal{G}_{N1}(\mathbf{u}_N), \mathbf{v}_N \rangle = \sum_{i,j=1}^d \left((I_N(\mathbf{u}_{Nj} \mathbf{v}_{Ni}), \frac{\partial \mathbf{u}_{Ni}}{\partial x_j})_N - (I_N \mathbf{f}, \mathbf{v}_{Ni})_N \right).$$

En utilisant la formule (2.3.5), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_{N1}(\mathbf{u}_N), \mathbf{v}_N \rangle &\leq c \sum_{i,j=1}^d \left(\|I_N(\mathbf{u}_{Nj} \mathbf{v}_{Ni})\|_{L^2(\Omega)^d} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}_{Ni}}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d} \right. \\ &\quad \left. + \|I_N \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{v}_{Ni}\|_{L^2(\Omega)^d} \right). \end{aligned}$$

En prenant $M = 2N$ dans la formule (2.4.3), on déduit

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_{N1}(\mathbf{u}_N), \mathbf{v}_N \rangle &\leq \sum_{i,j=1}^d \left(\|\mathbf{u}_{Nj}\|_{L^4(\Omega)^d} \|\mathbf{v}_{Ni}\|_{L^4(\Omega)^d} \|\mathbf{u}_{Ni}\|_{H^1(\Omega)^d} \right. \\ &\quad \left. + \|I_N \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{v}_{Ni}\|_{L^2(\Omega)^d} \right). \end{aligned}$$

Et par notant que $H^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^4(\Omega)$, on trouve l'estimation désiré, ce qui termine la démonstration.

Lemme 2.6.6

On suppose que v est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , à dérivée bornée. Soit (\mathbf{u}, p, T) une solution du problème (1.2.2)–(1.2.3) vérifiant l'hypothèse 2.6.1. Il existe alors un entier $N_0 > 0$ tel que pour tout $N \geq N_0$, l'opérateur $D\mathcal{F}_N(\mathbf{u}_N^\diamond)$ est un isomorphisme de $\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$. De plus, la norme de son inverse est bornée indépendamment de N .

Démonstration. (Partie 1) L'idée est de décomposer $D\mathcal{F}_N(\mathbf{u}_N^\diamond)$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}_N(\mathbf{u}_N^\diamond) &= D\mathcal{F}(\mathbf{u}) - \begin{pmatrix} \mathcal{S}(T) - \mathcal{S}_N(T_N^\diamond) & 0 \\ 0 & \mathcal{L} - \mathcal{L}_N \end{pmatrix} D\mathcal{G}(\mathbf{u}) \\ &\quad - \begin{pmatrix} \mathcal{S}_N(T_N^\diamond) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_N \end{pmatrix} (D\mathcal{G}(\mathbf{u}) - D\mathcal{G}(\mathbf{u}_N^\diamond)) \\ &\quad - \begin{pmatrix} \mathcal{S}_N(T_N^\diamond) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_N \end{pmatrix} (D\mathcal{G}(\mathbf{u}_N^\diamond) - D\mathcal{G}_N(\mathbf{u}_N^\diamond)) - \begin{pmatrix} D\mathcal{S}(T) - D\mathcal{S}_N(T_N^\diamond) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{G}(\mathbf{u}) \\ &\quad - \begin{pmatrix} D\mathcal{S}_N(T_N^\diamond) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathcal{G}(\mathbf{u}) - \mathcal{G}(\mathbf{u}_N^\diamond)) - \begin{pmatrix} D\mathcal{S}_N(T_N^\diamond) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathcal{G}(\mathbf{u}_N^\diamond) - \mathcal{G}_N(\mathbf{u}_N^\diamond)). \end{aligned}$$

En utilisant (i) de l'hypothèse 2.6.1, on aura le résultat désiré si les six derniers termes à droite tendent vers zéro quand N tend vers $+\infty$ dans la norme de l'espace \mathcal{E} .

i) Soit $W_N = (\mathbf{w}_N, R_N)$ un élément de la sphère unité de \mathcal{X}_N , on voit que :

$$D\mathcal{G}(\mathbf{u}) \cdot W_N = \begin{pmatrix} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}_N + (\mathbf{w}_N \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ ((\mathbf{u} \cdot \nabla) R_N + (\mathbf{w}_N \cdot \nabla) T, 0) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, quand W_N parcourt la sphère unité de \mathcal{X}_N , l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, quand $q < \infty$ en dimension $d = 2$ et $q < 6$ en dimension $d = 3$, combiné avec la régularité de \mathbf{u} , donne que le terme $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}_N + (\mathbf{w}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}$ et $(\mathbf{u} \cdot \nabla) R_N + (\mathbf{w}_N \cdot \nabla) T$

appartient à un sous-ensemble compact de $H^{-1}(\Omega)^d$ et $H^{-1}(\Omega)$ respectivement. En combinant tout cela avec (2.6.19), on obtient

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} \mathcal{S}(T) - \mathcal{S}_N(T_N^\diamond) & 0 \\ 0 & \mathcal{L} - \mathcal{L}_N \end{pmatrix} D\mathcal{G}(U) \right\|_{\mathcal{E}} = 0. \quad (2.6.34)$$

ii) Par la définition de $D\mathcal{G}$,

$$(D\mathcal{G}(U) - D\mathcal{G}(U_N^\diamond)) \cdot W_N = \begin{pmatrix} ((u - u_N^\diamond) \cdot \nabla) w_N + (w_N \cdot \nabla)(u - u_N^\diamond), \\ ((u - u_N^\diamond) \cdot \nabla) R_N + (w_N \cdot \nabla)(T - T_N^\diamond), 0 \end{pmatrix}.$$

En appliquant (2.6.20) pour $t < \rho$ tel que $H^t(\Omega)$ s'injecte dans $L^r(\Omega)$, avec $r > 2$ en dimension $d = 2$ et $r = 3$ en dimension $d = 3$ combiné avec (2.6.15) et (2.6.17), donne

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} \mathcal{S}_N(T_N^\diamond) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_N \end{pmatrix} (D\mathcal{G}(U) - D\mathcal{G}(U_N^\diamond)) \right\|_{\mathcal{E}} = 0. \quad (2.6.35)$$

iii) Par la définition de $D\mathcal{G}$ et $D\mathcal{G}_N$,

$$\begin{aligned} & \langle D\mathcal{G}(U_N^\diamond) - D\mathcal{G}_N(U_N^\diamond), v_N \rangle \cdot W_N \\ &= \begin{pmatrix} ((u_N^\diamond \cdot \nabla) w_N + (w_N \cdot \nabla) u_N^\diamond, v_N) - ((u_N^\diamond \cdot \nabla) w_N + (w_N \cdot \nabla) u_N^\diamond, v_N)_N \\ ((u_N^\diamond \cdot \nabla) R_N + (w_N \cdot \nabla) T_N^\diamond) - ((u_N^\diamond \cdot \nabla) R_N + (w_N \cdot \nabla) T_N^\diamond)_N, 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'idée se traite de la même façon pour les deux composantes, on va considérer donc uniquement la première composante, pour cela soit N' la partie entière de $\frac{N-1}{2}$, on introduit une approximation $u_{N'}$ de u_N^\diamond dans $\mathbb{P}_{N'}(\Omega)^d$, par les mêmes arguments du lemme 2.6.4, on déduit que

$$\langle D\mathcal{G}(U_N^\diamond) - D\mathcal{G}_N(U_N^\diamond), v_N \rangle \cdot W_N \leq c N^{\frac{-1}{2}} \|u_N^\diamond\|_{H^1(\Omega)^d}^2 \|v_N\|_{H^1(\Omega)^d}.$$

Combinant ce résultat avec (2.6.15) et (2.6.17), donne

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} \mathcal{S}_N(T_N^\diamond) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_N \end{pmatrix} (D\mathcal{G}(U_N^\diamond) - D\mathcal{G}_N(U_N^\diamond)) \right\|_{\mathcal{E}} = 0. \quad (2.6.36)$$

iv) D'autre part, on note que pour tout F dans $H^{-1}(\Omega)^d$,

$$\mathcal{S}(T)F = \mathcal{S}(T)(-\operatorname{div}(v(T)\nabla\mathcal{S}(T)F) + \operatorname{grad} p),$$

$$\begin{aligned} (D\mathcal{S}(T)R_N)F &= \mathcal{S}(T)(-\operatorname{div}(\partial_\theta v(T)R_N\nabla\mathcal{S}(T)F)), \\ (D\mathcal{S}_N(T)R_N)F &= \mathcal{S}_N(T)(-\operatorname{div}(\partial_\theta v(T)R_N\nabla\mathcal{S}_N(T)F)). \end{aligned} \quad (2.6.37)$$

En soustrayant la première ligne de la deuxième ligne, on aura :

$$\begin{aligned} (D(\mathcal{S} - \mathcal{S}_N)(T)R_N)F &= (\mathcal{S} - \mathcal{S}_N)(T)(-\operatorname{div}(\partial_\theta v(T)R_N\nabla\mathcal{S}(T)F)) \\ &\quad + \mathcal{S}_N(T)(-\operatorname{div}(\partial_\theta v(T)R_N\nabla(\mathcal{S} - \mathcal{S}_N)(T)F)) \end{aligned} \quad (2.6.38)$$

En notant par \mathbf{F} le premier composant de $\mathcal{G}(\mathbf{U})$, on remarque que $\mathcal{S}(\mathbf{T})\mathbf{F}$ égal à $-\mathbf{u}$, d'après (2.6.3).

En utilisant l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^r(\Omega)$ pour tout $r < \infty$ en dimension $d = 2$ et $r < 6$ en dimension $d = 3$, on déduit par l'hypothèse de la régularité sur la solution \mathbf{u} que, quand \mathbf{W}_N parcourt la sphère unité de \mathcal{X}_N , la quantité $-\text{div}(\partial_\theta \mathbf{v}(\mathbf{T}) \mathbf{R}_N \nabla \mathcal{S}(\mathbf{T})\mathbf{F})$ appartienne à un sous ensemble compact de $H^{-1}(\Omega)^d$.

En utilisant (2.6.19), on obtient

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|(\mathcal{S} - \mathcal{S}_N)(\mathbf{T})(-\text{div}(\partial_\theta \mathbf{v}(\mathbf{T}) \mathbf{R}_N \nabla \mathcal{S}(\mathbf{T})\mathbf{F}))\|_{\mathcal{E}} = 0.$$

Pour traiter le deuxième terme de l'équation (2.6.38), on voit que d'après (2.6.15) il suffit de prouver la convergence de $\|\nabla(\mathcal{S} - \mathcal{S}_N)(\mathbf{T})\mathbf{F}\|_{L^{q^*}(\Omega)^{d \times d}}$ avec $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = \frac{1}{2}$ pour le q introduit au début de cette preuve. Comme $\mathcal{S}(\mathbf{T})\mathbf{F}$ coïncide avec $-\mathbf{u}$ et en utilisant l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $W^{1,q^*}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \|\nabla(\mathcal{S} - \mathcal{S}_N)(\mathbf{T})\mathbf{F}\|_{L^{q^*}(\Omega)^{d \times d}} &= |\mathbf{u} - \mathbf{u}_N|_{W^{1,q^*}(\Omega)^d}, \\ &\leq c |\mathbf{u} - \mathbf{u}_N|_{H^1(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Ainsi d'après la formule (2.6.12),

$$\|\nabla(\mathcal{S} - \mathcal{S}_N)(\mathbf{T})\mathbf{F}\|_{L^{q^*}(\Omega)^{d \times d}} \leq c \left(N^{1-s} (\|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} + \|\mathbf{p}\|_{H^{s-1}(\Omega)}) \right).$$

Par conséquent,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\nabla(\mathcal{S} - \mathcal{S}_N)(\mathbf{T})\mathbf{F}\|_{L^{q^*}(\Omega)^{d \times d}} = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\mathcal{S}_N(\mathbf{T})(-\text{div}(\partial_\tau \mathbf{v}(\mathbf{T}) \mathbf{R}_N \nabla(\mathcal{S} - \mathcal{S}_N)(\mathbf{T})\mathbf{F}))\|_{\mathcal{E}} = 0$$

Par la suite,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} D(\mathcal{S} - \mathcal{S}_N)(\mathbf{T}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{G}(\mathbf{U}) \right\|_{\mathcal{E}} = 0. \quad (2.6.39)$$

v) La convergence du cinquième terme est déduite de (2.6.20), (2.6.33) et de la stabilité de $D\mathcal{S}_N(\theta)$ et la convergence du dernier terme est obtenu par les mêmes arguments que dans le lemme 2.6.4 et par la stabilité aussi de $D\mathcal{S}_N(\theta)$.

Ceci achève la démonstration de la première partie de ce lemme.

Démonstration. (Partie 2) $D\mathcal{F}(\mathbf{U})$ étant un isomorphisme de $\mathcal{X}(\Omega)$, soit $\gamma = \|D\mathcal{F}(\mathbf{U})^{-1}\|_{\mathcal{E}}$. Comme on a démontré d'après la première partie de cette démonstration, que les six termes tendent vers zéro quand N tend vers $+\infty$ et pour ce $\gamma > 0$, il existe un entier N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$, chaque terme est majoré par $\frac{1}{12\gamma}$.

On conclut alors que :

$$\|D\mathcal{F}_N(\mathbf{U}_N^\diamond)^{-1}\|_{\mathcal{E}} \leq 2\gamma.$$

Lemme 2.6.7

On suppose que la fonction v appartient à $W^{2,\infty}(\mathbb{R})$, à dérivée lipschitzienne. Il existe un voisinage de U_N^\diamond dans $X_N(\Omega)$ et une constante $c > 0$ tel que l'opérateur $D\mathcal{F}_N$ satisfait la propriété de Lipschitz, pour tout U_N^* dans ce voisinage,

$$\|D\mathcal{F}_N(U_N^\diamond) - D\mathcal{F}_N(U_N^*)\|_{\mathcal{L}} \leq c \mu(N) \|U_N^\diamond - U_N^*\|_{X(\Omega)}. \quad (2.6.40)$$

avec $\mu(N)$ est égal $|\log N|^{\frac{1}{2}}$ en dimension $d = 2$ et égal à N en dimension $d = 3$.

Démonstration. On introduit les opérateurs matriciels suivant

$$\mathcal{M}(\xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{S}(\xi) & 0 \\ 0 & \mathcal{L} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_N(\xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_N(\xi) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_N \end{pmatrix}.$$

En posant $U_N^* = (u_N^*, T_N^*)$, on a

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}_N(U_N^\diamond) - D\mathcal{F}_N(U_N^*) \\ = (\mathcal{M}_N(T_N^\diamond) - \mathcal{M}_N(T_N^*))D\mathcal{G}_N(U_N^\diamond) + (D\mathcal{M}_N(T_N^\diamond) - D\mathcal{M}_N(T_N^*))\mathcal{G}_N(U_N^\diamond) \\ + \mathcal{M}_N(T_N^*)(D\mathcal{G}_N(U_N^\diamond) - D\mathcal{G}_N(U_N^*)) + D\mathcal{M}_N(T_N^*)(\mathcal{G}_N(U_N^\diamond) - \mathcal{G}_N(U_N^*)). \end{aligned}$$

Nous devons évaluer ces quantités, soit $W_N = (w_N, R_N)$ un élément quelconque de la sphère unité de X_N et z_N un élément de la sphère unité de \mathbb{X}_N . L'analyse des deux derniers termes se reposent sur les mêmes arguments utilisés dans le lemme 2.6.4, nous allons considérer donc uniquement les deux premiers termes. Pour tout ce qui suit dans cette preuve, la constante c dépend des normes $\|U_N^\diamond\|_{X(\Omega)}$, $\|U_N^*\|_{X(\Omega)}$ et $\|v\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R})}$.

1) On a,

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_N(T_N^\diamond) - \mathcal{M}_N(T_N^*))D\mathcal{G}_N(U_N^\diamond)W_N \\ = \begin{pmatrix} (\mathcal{S}_N(T_N^\diamond) - \mathcal{S}_N(T_N^*))((u_N^\diamond \cdot \nabla)w_N + (w_N \cdot \nabla)u_N^\diamond) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ = \begin{pmatrix} u_* - u_{**} \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} u_* &= \mathcal{S}_N(T_N^\diamond)((u_N^\diamond \cdot \nabla)w_N + (w_N \cdot \nabla)u_N^\diamond), \\ u_{**} &= \mathcal{S}_N(T_N^*)((u_N^\diamond \cdot \nabla)w_N + (w_N \cdot \nabla)u_N^\diamond), \end{aligned}$$

où u_* et u_{**} vérifient les deux équations suivantes :

$$-\operatorname{div}(v(T_N^\diamond)\nabla u_*) + \nabla p_* = (u_N^\diamond \cdot \nabla)w_N + (w_N \cdot \nabla)u_N^\diamond,$$

et

$$-\operatorname{div}(v(T_N^*)\nabla u_{**}) + \nabla p_{**} = (u_N^\diamond \cdot \nabla)w_N + (w_N \cdot \nabla)u_N^\diamond.$$

En soustrayant la première de la deuxième équation, on obtient

$$-\operatorname{div}(v(T_N^\diamond)\nabla(u_* - u_{**})) + \nabla(p_* - p_{**}) = \operatorname{div}((v(T_N^\diamond) - v(T_N^*))\nabla u_{**}).$$

Ce qui nous permet d'écrire l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_{**} &= \mathcal{S}_N(T_N^\diamond) (\operatorname{div}(\mathbf{v}(T_N^\diamond) - \mathbf{v}(T_N^*)) \nabla \mathbf{u}_{**}), \\ &= \mathcal{S}_N(T_N^\diamond) (\operatorname{div}(\mathbf{v}(T_N^\diamond) - \mathbf{v}(T_N^*)) \nabla \mathcal{S}_N(T_N^*)) ((\mathbf{u}_N^\diamond \cdot \nabla) \mathbf{w}_N + (\mathbf{w}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^\diamond).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(\mathcal{M}_N(T_N^\diamond) - \mathcal{M}_N(T_N^*)) D \mathcal{G}_N(\mathbf{U}_N^\diamond) \mathbf{W}_N = \mathcal{M}_N(T_N^\diamond) \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix},$$

où

$$A = \operatorname{div}((\mathbf{v}(T_N^\diamond) - \mathbf{v}(T_N^*)) \nabla \mathcal{S}_N(T_N^*)) ((\mathbf{u}_N^\diamond \cdot \nabla) \mathbf{w}_N + (\mathbf{w}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^\diamond, z_N)_N),$$

d'après la propriété de Lipschitz sur \mathbf{v} , il existe une constante c telle que,

$$\|(\mathcal{M}_N(T_N^\diamond) - \mathcal{M}_N(T_N^*)) D \mathcal{G}_N(\mathbf{U}_N^\diamond) \mathbf{W}_N\|_{\mathcal{X}(\Omega)} \leq c \|T_N^\diamond - T_N^*\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{w}_N\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

En appliquant les inégalités inverses établies dans Quarteroni [32], vraies pour tout polynôme φ_N dans $\mathbb{P}_N(\Omega)$,

$$\|\varphi_N\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c N^{\frac{2d}{\delta}} \|\varphi_N\|_{L^\delta(\Omega)},$$

et en notant que

-en dimension $d = 3$, $H^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^6(\Omega)$, on aura alors

$$\|\mathbf{w}_N\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c N \|\mathbf{w}_N\|_{H^1(\Omega)},$$

$$\|(\mathcal{M}_N(T_N^\diamond) - \mathcal{M}_N(T_N^*)) D \mathcal{G}_N(\mathbf{U}_N^\diamond) \mathbf{W}_N\|_{\mathcal{X}(\Omega)} \leq c N \|T_N^\diamond - T_N^*\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{w}_N\|_{H^1(\Omega)},$$

-en dimension $d = 2$, $H^1(\Omega)$ s'injecte dans $L^\delta(\Omega)$ et la constante de l'injection est majorée par $c\sqrt{\delta}$ (voir [37] pour plus de détails), on obtient ainsi

$$\|\mathbf{w}_N\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\sqrt{\delta} N^{\frac{4}{\delta}} \|\mathbf{w}_N\|_{H^1(\Omega)}.$$

En prenant ainsi δ égal à $\log N$,

$$\|(\mathcal{M}_N(T_N^\diamond) - \mathcal{M}_N(T_N^*)) D \mathcal{G}_N(\mathbf{U}_N^\diamond) \mathbf{W}_N\|_{\mathcal{X}(\Omega)} \leq c |\log N|^{\frac{1}{2}} \|T_N^\diamond - T_N^*\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{w}_N\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ceci achève la démonstration de 1).

2) On a,

$$\begin{aligned}\langle ((D\mathcal{M}_N(T_N^\diamond) - D\mathcal{M}_N(T_N^*)) \mathbf{R}_N) \mathcal{G}_N(\mathbf{U}_N^\diamond), \mathbf{v}_N \rangle \\ = \left(D\mathcal{S}_N(T_N^\diamond - T_N^*) \mathbf{R}_N ((\mathbf{u}_N^\diamond \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^\diamond - \mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N \right),\end{aligned}$$

d'autre part, en combinant la deuxième partie de (2.6.37)

$$\|((D\mathcal{M}_N(T_N^\diamond) - D\mathcal{M}_N(T_N^*)) \mathbf{R}_N) \mathcal{G}_N(\mathbf{U}_N^\diamond)\|_{\mathcal{X}(\Omega)} \leq c \|T_N^\diamond - T_N^*\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{R}_N\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (2.6.41)$$

Les mêmes arguments que dans la partie 1) permettent de terminer la démonstration.

On peut maintenant montrer l'estimation donnée par le lemme suivant :

Lemme 2.6.8

Supposons que ν est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , la solution (\mathbf{u}, p, T) du problème (1.2.2)-(1.2.3) appartient à $H^s(\Omega)^d \times H^{s-1}(\Omega) \times H^s(\Omega)$, pour un entier $s > \frac{d}{2} - 1$, et les données (\mathbf{f}, T_b) appartiennent à $H^\sigma(\Omega)^d \times H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, pour un entier $\sigma > \frac{d}{2}$. On a,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_N(\mathbf{u}_N^\diamond)\|_{X(\Omega)} &\leq c N^{1-s} (\|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} + \|p\|_{H^{s-1}(\Omega)} + \|T\|_{H^s(\Omega)}) \\ &\quad + c' N^{-\sigma} (\|\mathbf{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^d} + \|T_b\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}). \end{aligned} \quad (2.6.42)$$

Démonstration. Comme $\mathcal{F}(\mathbf{u})$ est égal à zéro, on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_N(\mathbf{u}_N^\diamond)\|_{X(\Omega)} &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N^\diamond\|_{X(\Omega)} + \left\| \begin{pmatrix} (\mathcal{S} - \mathcal{S}_N)(T) & 0 \\ 0 & \mathcal{L} - \mathcal{L}_N \end{pmatrix} \mathcal{G}(\mathbf{u}) \right\|_{X(\Omega)} \\ &\quad + \left\| \begin{pmatrix} \mathcal{S}_N(T) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_N \end{pmatrix} (\mathcal{G}(\mathbf{u}) - \mathcal{G}(\mathbf{u}_N^\diamond)) \right\|_{X(\Omega)} \\ &\quad + \left\| \begin{pmatrix} \mathcal{S}_N(T) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_N \end{pmatrix} (\mathcal{G}(\mathbf{u}_N^\diamond) - \mathcal{G}_N(\mathbf{u}_N^\diamond)) \right\|_{X(\Omega)}. \end{aligned}$$

Le premier terme est déjà majoré dans (2.6.20). Pour évaluer le second terme, on utilise (2.6.16) et (2.6.18) en notant que : Si \mathbf{F} désigne le premier composant de $\mathcal{G}(\mathbf{u})$, $\mathcal{S}(\theta)\mathbf{F}$ égal à $-\mathbf{u}$ et \mathbf{F} égal à $\text{div}(\nu(T)\nabla\mathbf{u}) - \mathbf{grad} p$. Pour majorer le troisième terme, on applique la formule (2.6.15), (2.6.17), l'inégalité triangulaire et l'estimation (2.6.20). Finalement, pour estimer le quatrième terme nous utilisons la formule (2.6.15) et (2.6.17) combinés avec les mêmes arguments utilisés pour la démonstration du lemme 2.6.4.

Grâce aux lemmes 2.6.6 à 2.6.8, nous sommes à présent en mesure de prouver le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.6.4

Soit (\mathbf{u}, p, T) une solution du problème (1.2.2)–(1.2.3) qui satisfait l'hypothèse 2.6.1 et qui appartient à $H^s(\Omega)^d \times H^{s-1}(\Omega) \times H^s(\Omega)$, pour un entier $s > \frac{d}{2} - 1$. Supposons que les données (\mathbf{f}, T_b) appartiennent à $H^\sigma(\Omega)^d \times H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, pour un entier $\sigma > \frac{d}{2}$. Supposons de plus que la fonction ν est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} à dérivée bornée. Alors, il existe un entier positif N_0 , tel que pour tout $N \geq N_0$, le problème (2.5.1)–(2.5.2) admet une solution unique (\mathbf{u}_N, T_N) dans la boule de centre (\mathbf{u}, T) et de rayon $c_\diamond \mu(N)^{-1}$ pour la constante $\mu(N)$ introduite dans le lemme 2.6.7. De plus, cette solution satisfait

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} + \|T - T_N\|_{H^1(\Omega)} &\leq c N^{1-s} (\|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} + \|p\|_{H^{s-1}(\Omega)} + \|T\|_{H^s(\Omega)}) \\ &\quad + c' N^{-\sigma} (\|\mathbf{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^d} + \|T_b\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}). \end{aligned} \quad (2.6.43)$$

Démonstration. En combinant les lemmes 2.6.6, 2.6.7 et 2.6.8, on a alors tous les outils pour appliquer le théorème de Brezzi-Rappaz-Raviart [13], voir aussi ([24, Chap. IV, Thm 3.1]). En effet, comme $D\mathcal{F}_N(\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond)$ est un isomorphisme de $X(\Omega)$, on a :

$$\|(D\mathcal{F}_N(\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond))^{-1}\|_{\mathcal{E}} \leq 2\gamma,$$

où

$$\gamma = \|(\mathcal{D}\mathcal{F}(\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond))^{-1}\|_{\mathcal{E}}.$$

On définit maintenant les constantes suivantes :

$$\begin{aligned}\gamma_N &= \|(\mathcal{D}\mathcal{F}_N(\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond))^{-1}\|_{\mathcal{E}}, \\ \eta_N &= \|\mathcal{F}_N(\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond)\|_{X(\Omega)}, \\ L_N(\alpha) &= \sup_{\|(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}) - (\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond)\|_{X(\Omega)} \leq \alpha} \|\mathcal{D}\mathcal{F}_N(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}) - \mathcal{D}\mathcal{F}_N(\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond)\|_{\mathcal{E}}.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{N \rightarrow \infty} \eta_N = 0$ par définition de cette limite : $\exists N_1 \geq N_0$ tel que $\forall N \geq N_1$, on a :

$$\eta_N < \frac{1}{16c\gamma^2\mu(N)},$$

où la constante $c\mu(N)$ est celle de (2.6.7).

D'autre part, on a :

$$L_N(2\gamma_N \cdot \eta_N) = \sup_{\|(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}) - (\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond)\|_{X(\Omega)} \leq 2\gamma_N \eta_N} \|\mathcal{D}\mathcal{F}_N(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}) - \mathcal{D}\mathcal{F}_N(\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond)\|_{\mathcal{E}}.$$

Or d'après (2.6.7) on peut écrire :

$$\|\mathcal{D}\mathcal{F}_N(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}) - \mathcal{D}\mathcal{F}_N(\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond)\|_{\mathcal{E}} \leq c\mu(N)\|(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}) - (\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond)\|_{X(\Omega)},$$

ce qui donne :

$$L_N(2\gamma_N \cdot \eta_N) \leq 2c\gamma_N \cdot \eta_N \cdot \mu(N) < \frac{\gamma_N}{8\gamma^2}.$$

Comme $\gamma_N \leq 2\gamma$, on déduit que :

$$L_N(2\gamma_N \cdot \eta_N) < \frac{1}{2\gamma_N}$$

c'est-à-dire que :

$$2\gamma_N L_N(2\gamma_N \cdot \eta_N) < 1,$$

qui est une condition nécessaire pour l'existence et l'unicité d'une solution du problème (2.6.6) dans la boule de centre (\mathbf{u}, T) et de rayon $\alpha < \frac{1}{2c\gamma\mu(N)}$.

Pour conclure, le théorème de Brezzi-Rappaz-Raviart donne l'estimation suivante :

$$\|(\mathbf{u}_N, T_N) - (\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond)\|_{X(\Omega)} \leq \frac{\gamma_N}{1 - \gamma_N L_N(\alpha)} \|\mathcal{F}_N(\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond)\|_{X(\Omega)}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\|(\mathbf{u}, T) - (\mathbf{u}_N, T_N)\|_{X(\Omega)} \leq \|(\mathbf{u}, T) - (\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond)\|_{X(\Omega)} + \|(\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond) - (\mathbf{u}_N, T_N)\|_{X(\Omega)}$$

On additionne (2.6.20) et on trouve

$$\|(\mathbf{u}, T) - (\mathbf{u}_N, T_N)\|_{X(\Omega)} \leq cN^{1-s}(\|\mathbf{u}\|_{H^{s-1}(\Omega)^d} + \|T\|_{H^s(\Omega)}) + \frac{\gamma_N}{1 - \gamma_N L_N(\alpha)} \|\mathcal{F}_N(\mathbf{u}_N^\diamond, T_N^\diamond)\|_{X(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité (2.6.42), on aura :

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{u}, T) - (\mathbf{u}_N, T_N)\|_{X(\Omega)} \\ & \leq \frac{\gamma_N}{1 - \gamma_N L_N(\alpha)} c \left(N^{1-s} (\|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} + \|\mathbf{p}\|_{H^{s-1}(\Omega)} + \|T\|_{H^s(\Omega)}) \right. \\ & \quad \left. + c' N^{-\sigma} (\|\mathbf{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^d} + \|T_b\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}) \right). \end{aligned}$$

Or on a :

$$\frac{\gamma_N}{1 - \gamma_N L_N(\alpha)} \leq \frac{2\gamma}{1 - 2\gamma L_N(\alpha)} \quad \text{et} \quad L_N(\alpha) \leq L\alpha,$$

d'où le résultat suivant :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} + \|T - T_N\|_{H^1(\Omega)} \\ & \leq \frac{2\gamma c}{1 - 2\gamma L\alpha} \left(N^{1-s} (\|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} + \|\mathbf{p}\|_{H^{s-1}(\Omega)} + \|T\|_{H^s(\Omega)}) \right. \\ & \quad \left. + c' N^{-\sigma} (\|\mathbf{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^d} + \|T_b\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}) \right). \end{aligned}$$

2.6.3 Problème discret sur la pression

Pour approcher la pression p , on considère le problème discret :
Trouver $p_N \in \mathbb{M}_N$ telle que

$$(\operatorname{div} \mathbf{v}_N, p_N)_N = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N - (\gamma(T_N) \nabla \mathbf{u}_N, \nabla \mathbf{v}_N)_N - ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N, \quad \forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N. \quad (2.6.44)$$

La condition inf-sup (2.6.11) assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème (2.6.44). On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.6.5

Soit (\mathbf{u}, p, T) une solution du problème (1.2.2)–(1.2.3) qui satisfait l'hypothèse 2.6.1 et qui appartient à $H^s(\Omega)^d \times H^{s-1}(\Omega) \times H^s(\Omega)$ pour un entier $s > \frac{d}{2} - 1$. Supposons que les données (\mathbf{f}, T_b) appartiennent à $H^\sigma(\Omega)^d \times H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, pour un entier $\sigma > \frac{d}{2}$. On suppose de plus que la fonction γ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} à dérivées bornées. Alors, il existe un entier positif N_0 , tel que pour tout $N \geq N_0$, le problème (2.5.1)–(2.5.2) admet une unique solution (\mathbf{u}_N, p_N, T_N) qui satisfait l'estimation d'erreur suivante :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} + \|T - T_N\|_{H^1(\Omega)} + N^{-(d-1)/2} \|p - p_N\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq c N^{1-s} \left(\|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} + \|\mathbf{p}\|_{H^{s-1}(\Omega)} + \|T\|_{H^s(\Omega)} \right) \\ & \quad + c' N^{-\sigma} \left(\|\mathbf{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^d} + \|T_b\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \right). \quad (2.6.45) \end{aligned}$$

Démonstration. D'une part, l'inégalité (2.6.43) donne :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} + \|T - T_N\|_{H^1(\Omega)} \\ & \leq c N^{1-s} \left(\|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)^d} + \|\mathbf{p}\|_{H^{s-1}(\Omega)} + \|T\|_{H^s(\Omega)} \right) \\ & \quad + c' N^{-\sigma} \left(\|\mathbf{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^d} + \|T_b\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \right). \quad (2.6.46) \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout q_N dans \mathbb{M}_N , on a :

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \mathbf{v}_N, p_N - q_N)_N &= (\operatorname{div} \mathbf{v}_N, p - q_N) + (\mathbf{f}, \mathbf{v}_N) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N \\ &\quad + (\gamma(T_N) \nabla \mathbf{u}_N, \nabla \mathbf{v}_N)_N - (\gamma(T) \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}_N) \\ &\quad + ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}_N) \end{aligned} \quad (2.6.47)$$

La condition inf-sup (2.6.11) permet d'avoir le résultat suivant :

$$N^{-(d-1)/2} \beta \|p_N - q_N\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{(\operatorname{div} \mathbf{v}_N, p_N - q_N)_N}{\|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}}. \quad (2.6.48)$$

En combinant cette inégalité (2.6.48) avec (2.6.47), on aura :

$$\begin{aligned} N^{-(d-1)/2} \beta \|p_N - q_N\|_{L^2(\Omega)} &\leq \sup_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{(\operatorname{div} \mathbf{v}_N, p - q_N)}{\|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}} \\ &\quad + \sup_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_N) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N}{\|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}} \\ &\quad + \sup_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}_N)}{\|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}} \\ &\quad + \sup_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{(\gamma(T_N) \nabla \mathbf{u}_N, \nabla \mathbf{v}_N)_N - (\gamma(T) \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}_N)}{\|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}} \end{aligned}$$

Les majorations des quatre quantités sont données respectivement par :

- La continuité de la forme bilinéaire sur $H^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)$:

$$(\operatorname{div} \mathbf{v}_N, p - q_N) \leq c_1 \|p - q_N\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}$$

ce qui donne, que pour tout $\mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N$, non nul

$$\frac{(\operatorname{div} \mathbf{v}_N, p - q_N)}{\|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}} \leq c_1 \|p - q_N\|_{L^2(\Omega)},$$

d'où

$$\sup_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{(\operatorname{div} \mathbf{v}_N, p - q_N)}{\|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}} \leq c_1 \|p - q_N\|_{L^2(\Omega)}.$$

- Maintenant, les mêmes arguments que pour l'inégalité (2.6.32) impliquent :

$$\sup_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_N) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N}{\|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}} \leq c_2 N^{-\sigma} \|\mathbf{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^d}$$

- On a,

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}_N) &= ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N - (\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'}, \mathbf{v}_N)_N \\ &\quad + ((\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}_N), \end{aligned}$$

or,

$$((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}_N) = ((\mathbf{u}_N - \mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_N + (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\mathbf{u}_N - \mathbf{u}), \mathbf{v}_N).$$

d'où

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}_N) &= ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N - (\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'}, \mathbf{v}_N)_N \\ &\quad + ((\mathbf{u}_{N'} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N'} - (\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) \\ &\quad + ((\mathbf{u}_N - \mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_N + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_N - \mathbf{u}), \mathbf{v}_N). \end{aligned}$$

Les deux premiers termes ont été majorés dans la démonstration du lemme 2.6.4 d'où l'estimation

$$\sup_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}_N)}{\|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}} \leq c \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} (\|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} + \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d}). \quad (2.6.49)$$

• Reste à majorer le dernier terme. En effet on a,

$$\sup_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{(\nu(T_N) \nabla \mathbf{u}_N, \nabla \mathbf{v}_N)_N - (\nu(T) \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}_N)}{\|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}} \leq \nu_1 c_3 (\|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} + \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d}) \quad (2.6.50)$$

D'autre part, les conditions de stabilité donnent :

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} + \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d} \\ &\leq c \left(\|I_N \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d} + 2\|g\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\mathbf{T}_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|\mathbf{i}_N^{\partial\Omega} \mathbf{T}_b\|_{H^1(\Omega)} \right), \\ &\leq c \left(\|I_N \mathbf{f} - \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^d} + 2\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d} + 2\|g\|_{H^{-1}(\Omega)} + 2\|\mathbf{T}_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|\mathbf{T}_b - \mathbf{i}_N^{\partial\Omega} \mathbf{T}_b\|_{H^1(\Omega)} \right), \\ &\leq c \left(N^{-\sigma} (\|\mathbf{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^d} + \|\mathbf{T}_b\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}) + 2\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d} + 2\|g\|_{H^{-1}(\Omega)} + 2\|\mathbf{T}_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \right), \\ &= c_4. \end{aligned}$$

avec $c_4 = C(\mathbf{f}, g, \mathbf{T}_b)$.

En remplaçant alors cette inégalité dans (2.6.49) et (2.6.50), on obtient

$$\sup_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_N - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}_N)}{\|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}} \leq c_4 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d},$$

et

$$\sup_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{(\nu(T_N) \nabla \mathbf{u}_N, \nabla \mathbf{v}_N)_N - (\nu(T) \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}_N)}{\|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}} \leq \nu_1 c_3 c_4.$$

La combinaison des estimations d'erreur précédentes permet d'avoir :

$$\begin{aligned} N^{-(d-1)/2} \beta \|\mathbf{p}_N - \mathbf{q}_N\|_{L^2(\Omega)} &\leq c_1 \|\mathbf{p} - \mathbf{q}_N\|_{L^2(\Omega)} + c_2 N^{-\sigma} (\|\mathbf{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^d} + \|\mathbf{T}_b\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}) \\ &\quad + c_4 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} + \nu_1 c_3 c_4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N^{-(d-1)/2} \beta \|\mathbf{p}_N - \mathbf{q}_N\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left(\|\mathbf{p} - \mathbf{q}_N\|_{L^2(\Omega)} + N^{-\sigma} (\|\mathbf{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^d} + \|\mathbf{T}_b\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}) \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)^d} \right). \end{aligned}$$

En utilisant (2.6.43), on obtient :

$$\begin{aligned} N^{-(d-1)/2} \beta \|p_N - q_N\|_{L^2(\Omega)} &\leq C' \left(\|p - q_N\|_{L^2(\Omega)} + N^{-\sigma} (\|f\|_{H^\sigma(\Omega)^d} + \|T_b\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}) \right. \\ &\quad \left. + N^{1-s} (\|u\|_{H^s(\Omega)^d} + \|p\|_{H^{s-1}(\Omega)^d} + \|T\|_{H^s(\Omega)}) \right) \end{aligned}$$

En combinant ce dernier résultat avec l'inégalité triangulaire :

$$\|p - p_N\|_{L^2(\Omega)} \leq \|p - q_N\|_{L^2(\Omega)} + \|p_N - q_N\|_{L^2(\Omega)},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} N^{-(d-1)/2} \|p - p_N\|_{L^2(\Omega)} &\leq C' \left(\inf_{q_N \in \mathbb{M}_N} \|p - q_N\|_{L^2(\Omega)} + N^{-\sigma} (\|f\|_{H^\sigma(\Omega)^d} + \|T_b\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}) \right. \\ &\quad \left. + N^{1-s} (\|u\|_{H^s(\Omega)^d} + \|p\|_{H^{s-1}(\Omega)^d} + \|T\|_{H^s(\Omega)}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &N^{-(d-1)/2} \|p - p_N\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C'' \left(N^{-\sigma} (\|f\|_{H^\sigma(\Omega)^d} + \|T_b\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}) \right. \\ &\quad \left. + N^{1-s} (\|u\|_{H^s(\Omega)^d} + \|p\|_{H^{s-1}(\Omega)^d} + \|T\|_{H^s(\Omega)}) \right). \end{aligned}$$

Ce résultat et l'estimation (2.6.47) donnent l'estimation finale.

2.7 Implémentation numérique

On se propose dans cette partie d'écrire le système correspondant au problème (2.5.1)–(2.5.2). Ceci nous permet de mieux visualiser le type de système matriciel obtenu par notre méthode de discrétisation et donc de mieux appréhender sa résolution. On présente dans un second lieu un algorithme utilisé pour sa résolution. Et on finit le chapitre en donnant quelques résultats numériques, qui s'avèrent cohérents avec les résultats obtenus dans l'analyse du problème continu et du problème discret. Pour des raisons de simplicité nous effectuons les calculs en dimension $d = 2$.

2.7.1 Algorithme de résolution pour le problème de Navier-Stokes/chaleur

Méthode de Newton

Pour résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes/chaleur, et d'après les résultats présentés dans les paragraphes précédents, on utilise la méthode de Newton sur le problème (2.6.6) (voir [24, Chap. IV]).

On se propose de construire une suite $(U_N^m)_n = (u_N^m, T_N^m)_n$ à partir d'un terme initial $(U_N^0)_n = (u_N^0, T_N^0)_n$, la résolution itérative de l'équation s'écrit :

$$U_N^{m+1} = U_N^m - D\mathcal{F}_N(U_N^m)^{-1} \mathcal{F}_N(U_N^m),$$

qui est équivalent à écrire :

$$U_N^{m+1} = U_N^m - \tilde{U}_N^m,$$

où $\tilde{U}_N^m = (\tilde{u}_N^m, \tilde{T}_N^m)$ est solution du problème suivant :

$$D\mathcal{F}_N(U_N^m) \tilde{U}_N^m = \mathcal{F}_N(U_N^m),$$

Ceci est équivalent à résoudre le problème suivant, pour $m \geq 1$:

Trouver $(\tilde{u}_N^m, \tilde{p}_N^m, \tilde{T}_N^m) \in \mathbb{X}_N \times \mathbb{M}_N \times \mathbb{Y}_N$ tel que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, \quad & (\nu(T_N^m) \nabla \tilde{\mathbf{u}}_N^m, \nabla \mathbf{v}_N)_N + ((\mathbf{u}_N^m \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_N^m + (\tilde{\mathbf{u}}_N^m \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^m, \mathbf{v}_N)_N \\ & - (\operatorname{div} \mathbf{v}_N, \tilde{p}_N^m)_N = \\ & (\nu(T_N^m) \nabla \mathbf{u}_N^m, \nabla \mathbf{v}_N)_N + ((\mathbf{u}_N^m \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^m, \mathbf{v}_N)_N - (\operatorname{div} \mathbf{v}_N, p_N^m)_N - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N \\ \forall q_N \in \mathbb{M}_N, \quad & -(\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_N^m, q_N)_N = 0 \\ \forall S_N \in \mathbb{Y}_N^0, \quad & \alpha(\nabla \tilde{T}_N^m, \nabla S_N)_N + ((\tilde{\mathbf{u}}_N^m \cdot \nabla) T_N^m + (\mathbf{u}_N^m \cdot \nabla) \tilde{T}_N^m, S_N)_N \\ & = \alpha(\nabla T_N^m, \nabla S_N)_N + ((\mathbf{u}_N^m \cdot \nabla) T_N^m, S_N)_N - (g, S_N)_N \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

2.8 Système matriciel

Pour écrire le système matriciel, il faut d'abord préciser les inconnues, c'est-à-dire les valeurs de la vitesse, la pression et de la température en un certain nombre de nœuds qui formeront le vecteur solution du système.

On commence donc par rappeler certaines formules et notations concernant le choix des fonctions de bases et des fonctions de tests, ce qui nous permet de déterminer les matrices

et les vecteurs du système matriciel.

Notations

On définit m_j le polynôme de base de Lagrange de degré $N - 2$ associé à $\xi_j, 1 \leq j \leq N - 1$, ξ_j étant les zéros de L'_N .

Lemme 2.8.1 On a

$$m'_j(\xi_q) = \begin{cases} \frac{(1 - \xi_j^2)L_N(\xi_q)}{L_N(\xi_j)(1 - \xi_q^2)(\xi_q - \xi_j)} & \text{si } j \neq q \\ \frac{2\xi_j}{1 - \xi_j^2} & \text{si } j = q \end{cases} \quad (2.8.1)$$

Démonstration. On remarque que, d'après (2.2.3) on a :

$$m_j(\xi) = -\frac{(1 - \xi_j^2)L'_N(\xi)}{N(N+1)L_N(\xi_j)(\xi - \xi_j)}, \text{ pour } \xi \neq \xi_j \text{ et } 1 \leq j \leq N$$

On en déduit que :

$$m_j(-1) = -\frac{(1 - \xi_j)}{2L_N(\xi_j)}L_N(-1) \quad (2.8.2)$$

et

$$m_j(1) = -\frac{(1 + \xi_j)}{2L_N(\xi_j)}. \quad (2.8.3)$$

On dérive le polynôme $(1 - \xi^2)(\xi - \xi_j)m_j(\xi)$ deux fois et on utilise (2.2.3) on trouve :

$$m'_j(\xi_q) = \frac{(1 - \xi_j^2)L'_N(\xi_q)}{2L_N(\xi_j)(-3\xi_q^2 + 2\xi_j\xi_q + 1)} \left[1 + \frac{(2\xi_j - 6\xi_q)}{N(N+1)(\xi_q - \xi_j)} \right], \text{ pour } q = 0 \text{ ou } N,$$

en remplaçant q par N et 0 , on obtient

$$m'_j(1) = \frac{(1 + \xi_j)}{4L_N(\xi_j)} \left(-L'_N(1) + \frac{L_N(1)(3 + \xi_j)}{(1 - \xi_j)} \right), \quad (2.8.4)$$

et

$$m'_j(-1) = -\frac{(1 - \xi_j)}{4L_N(\xi_j)} \left(L'_N(1) + \frac{L_N(-1)(3 + \xi_j)}{(1 + \xi_j)} \right). \quad (2.8.5)$$

Pour $1 \leq q \leq N - 1$ on trouve

$$m'_j(\xi_q) = \frac{(1 - \xi_j^2)L_N(\xi_q)}{(1 - \xi_q^2)(\xi_q - \xi_j)L_N(\xi_j)}, \text{ pour } j \neq q$$

et

$$m'_j(\xi_j) = \frac{2\xi_j}{(1 - \xi_j^2)}.$$

2.8.1 Description du système linéaire

Nous notons

$$\mathcal{L} = \{1, \dots, N-1\}^2.$$

Nous introduisons \mathcal{L}_0 le sous-ensemble de \mathcal{L}

$$\mathcal{L}_0 = \{(i, j) \in \{1, \dots, N-1\}^2; (\xi_i, \xi_j) \in \Xi_N \cap \Omega\},$$

et \mathcal{M} son complémentaire

$$\mathcal{M} = \{(i, j) \in \{1, \dots, N-1\}^2; (\xi_i, \xi_j) \in \Xi_N \cap \partial\Omega\},$$

Nous considérons le problème (2.7.1). Nous supposons connues les valeurs de la fonction f et les valeurs de la fonction g aux points de $\Xi_N \cap \Omega$ et les valeurs de la fonction T_b aux points de $\Xi_N \cap \bar{\Gamma}_j$, $1 \leq j \leq 4$. Les inconnues à calculer sont les valeurs $\tilde{\mathbf{u}}_{ij}$, \tilde{p}_{ij} et \tilde{T}_{ij} de la solution $\tilde{\mathbf{u}}_N$, \tilde{p}_N et \tilde{T}_N aux noeuds de Ξ_N .

Afin de définir le support des fonctions tests qui seront utilisées pour discrétiser les équations de Navier-Stokes/chaleur, nous devons définir les polynômes d'interpolation que nous allons utiliser dans $\mathbb{P}_N(\Omega)$. Nous faisons alors appel aux polynômes de Lagrange ℓ_j , $0 \leq j \leq N$, associés aux points ξ_j , c'est-à-dire les polynômes de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ qui valent 1 en ξ_j et s'annulent en ξ_k , $0 \leq k \leq N$, $k \neq j$. Les ℓ_j , $0 \leq j \leq N$, forment alors une base de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$. Alors une base de $\mathbb{P}_N(\Omega)$ est donnée par les

$$\{\ell_i(x)\ell_j(y), 0 \leq i, j \leq N\}.$$

On note que la famille $\ell_i\ell_j$ pour $1 \leq i, j \leq N-1$, forme une base de $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$. Les inconnues pour le vecteur vitesse sont ses valeurs aux points de $\Sigma_N \cap \Omega$, donc un polynôme $\tilde{\mathbf{u}}_N(.,.)$ s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{u}}_N(x, y) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{\mathbf{u}}_{ij} \ell_i(x) \ell_j(y)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}_{ij} = \tilde{\mathbf{u}}_N(\xi_i, \xi_j)$. Pour la pression, étant donné qu'elle est dans $\mathbb{P}_{N-2}(\Omega)$, on la décompose dans la base des $m_i m_j$, introduite précédemment. On a alors la décomposition suivante :

$$\tilde{p}_N(x, y) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{p}_N(\xi_i, \xi_j) m_i(x) m_j(y)$$

où $\tilde{p}_{ij} = \tilde{p}_N(\xi_i, \xi_j)$. Pour la température, on la décompose dans la base $\ell_i\ell_j$ pour $1 \leq i, j \leq N-1$. On a alors la décomposition suivante

$$\tilde{T}_N(x, y) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{T}_{ij} \ell_i(x) \ell_j(y) + \sum_{(i,k) \in \mathcal{M}} \tilde{T}_b(\xi_i, \xi_k) \ell_i(x) \ell_k(y)$$

avec

$$\tilde{T}_{ij} = \tilde{T}_N(\xi_i, \xi_j).$$

Système linéaire

Dès la première itération, on résout le problème suivant :

Trouver $(\tilde{\mathbf{u}}_N^1, \tilde{\mathbf{p}}_N^1, \tilde{\mathbf{T}}_N^1) \in \mathbb{X}_N \times \mathbb{M}_N \times \mathbb{Y}_N$ tels que

$$\begin{aligned}
 \forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, \quad & (\mathbf{v}(\mathbf{T}_N^1) \nabla \tilde{\mathbf{u}}_N^1, \nabla \mathbf{v}_N)_N + ((\mathbf{u}_N^1 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_N^1 + (\tilde{\mathbf{u}}_N^1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^1, \mathbf{v}_N)_N \\
 & - (\operatorname{div} \mathbf{v}_N, \tilde{\mathbf{p}}_N^1)_N = \\
 & (\mathbf{v}(\mathbf{T}_N^1) \nabla \mathbf{u}_N^1, \nabla \mathbf{v}_N)_N + ((\mathbf{u}_N^1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^1, \mathbf{v}_N)_N - (\operatorname{div} \mathbf{v}_N, \mathbf{p}_N^1)_N - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_N)_N, \\
 \forall \mathbf{q}_N \in \mathbb{M}_N, \quad & -(\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_N^1, \mathbf{q}_N)_N = 0, \\
 \forall S_N \in \mathbb{Y}_N^0, \quad & \alpha(\nabla \tilde{\mathbf{T}}_N^1, \nabla S_N)_N + ((\tilde{\mathbf{u}}_N^1 \cdot \nabla) \mathbf{T}_N^1 + (\mathbf{u}_N^1 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{T}}_N^1, S_N)_N \\
 & = \alpha(\nabla \mathbf{T}_N^1, \nabla S_N)_N + ((\mathbf{u}_N^1 \cdot \nabla) \mathbf{T}_N^1, S_N)_N - (\mathbf{g}, S_N)_N.
 \end{aligned} \tag{2.8.6}$$

Nous nous intéressons maintenant à l'écriture du système algébrique issu du problème (2.8.6) sur le carré $\Omega =]-1, 1[^2$ lorsque les entiers r et s varient dans $[1, N-1]$.

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \sum_{(i,j) \in \mathcal{L}} \tilde{\mathbf{u}}_{ij}^1 (\mathbf{v}(\mathbf{T}_N^1) \nabla (\ell_i \otimes \ell_j), \nabla (\ell_r \otimes \ell_s))_N + \sum_{(i,j) \in \mathcal{L}} \tilde{\mathbf{u}}_{ij}^1 ((\mathbf{u}_N^1 \cdot \nabla) \ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s)_N \\
 & + \sum_{(i,j) \in \mathcal{L}} \tilde{\mathbf{u}}_{ij}^1 ((\ell_i \otimes \ell_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^1, \ell_r \otimes \ell_s)_N - \sum_{(i,j) \in \mathcal{L}} \tilde{\mathbf{p}}_{ij}^1 (\operatorname{div} \ell_r \otimes \ell_s, \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_j)_N \\
 & \quad = (\mathbf{v}(\mathbf{T}_N^1) \nabla \mathbf{u}_N^1, \nabla (\ell_r \otimes \ell_s))_N + ((\mathbf{u}_N^1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^1) (\xi_r, \xi_s) \rho_r \rho_s \\
 & \quad \quad - (\operatorname{div} \ell_r \otimes \ell_s, \mathbf{p}_N^1)_N - \mathbf{f}(\xi_r, \xi_s) \rho_r \rho_s, \\
 & - \sum_{(i,j) \in \mathcal{L}} \tilde{\mathbf{u}}_{ij}^1 (\operatorname{div} \ell_i \otimes \ell_j, \mathbf{m}_r \otimes \mathbf{m}_s)_N = 0, \\
 & \sum_{(i,j) \in \mathcal{L}} \tilde{\mathbf{T}}_{ij}^1 \alpha(\nabla (\ell_i \otimes \ell_j), \nabla (\ell_r \otimes \ell_s))_N + \sum_{(i,j) \in \mathcal{L}} \tilde{\mathbf{u}}_{ij}^1 ((\ell_i \otimes \ell_j \cdot \nabla) \mathbf{T}_N^1, \ell_r \otimes \ell_s)_N \\
 & \quad \quad + \sum_{(i,j) \in \mathcal{L}} \tilde{\mathbf{T}}_{ij}^1 ((\mathbf{u}_N^1 \cdot \nabla) \ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s)_N \\
 & \quad = \alpha(\nabla \mathbf{T}_N^1, \nabla (\ell_r \otimes \ell_s))_N + ((\mathbf{u}_N^1 \cdot \nabla) \mathbf{T}_N^1) (\xi_r, \xi_s) \rho_r \rho_s - \mathbf{g}(\xi_r, \xi_s) \rho_r \rho_s \\
 & \quad \quad - \alpha \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} \tilde{\mathbf{T}}_b^1(\xi_i, \xi_j) (\nabla (\ell_i \otimes \ell_j), \nabla (\ell_r \otimes \ell_s))_N \\
 & \quad \quad - \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} \tilde{\mathbf{T}}_b^1(\xi_i, \xi_j) ((\mathbf{u}_N^1 \cdot \nabla) \ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s)_N.
 \end{aligned} \right.$$

On obtient ainsi l'équation matricielle suivante de $4(N-1)^2$ équations à $4(N-1)^2$ inconnues où $\tilde{\mathbf{U}}$ désigne le vecteur formé par les valeurs des deux composantes de la vitesse, $\tilde{\mathbf{P}}$ celui formé par les valeurs de la pression et $\tilde{\mathbf{T}}$ celui formé par les valeurs de la température :

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \mathbf{A} \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{H} \\
 & \mathbf{B} \tilde{\mathbf{U}} = 0 \\
 & \mathbf{C} \tilde{\mathbf{T}} + \mathbf{D} \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{K}
 \end{aligned} \right. \tag{2.8.7}$$

- La matrice A est égale à $A_1 + A_2 + A_3$ qui sont données par

$$A_1 = (\nu(T_N^m) \nabla(\ell_i \otimes \ell_j), \nabla(\ell_r \otimes \ell_s))_N, \quad 1 \leq i, j, r, s \leq N-1, \quad (2.8.8)$$

$$A_2 = ((\mathbf{u}_N^m \cdot \nabla) \ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s)_N, \quad 1 \leq i, j, r, s \leq N-1, \quad (2.8.9)$$

et

$$A_3 = ((\ell_i \otimes \ell_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^m, \ell_r \otimes \ell_s)_N, \quad 1 \leq i, j, r, s \leq N-1. \quad (2.8.10)$$

- La matrice B a pour coefficient les termes

$$b_N(\ell_i \otimes \ell_j, m_r \otimes m_s) = -(\operatorname{div} \ell_i \otimes \ell_j, m_r \otimes m_s)_N, \quad 1 \leq i, j, r, s \leq N-1, \quad (2.8.11)$$

- La matrice $C = C_1 + A_2$, où C_1 est donnée

$$C_1 = \alpha(\nabla(\ell_i \otimes \ell_j), \nabla(\ell_r \otimes \ell_s))_N, \quad 1 \leq i, j, r, s \leq N-1, \quad (2.8.12)$$

$$(2.8.13)$$

- La matrice D a pour coefficients les termes suivants

$$((\ell_i \otimes \ell_j \cdot \nabla) T_N^m, \ell_r \otimes \ell_s)_N, \quad 1 \leq i, j, r, s \leq N-1, \quad (2.8.14)$$

- Le vecteur \mathbf{H} est formé par les termes

$$\begin{aligned} & (\nu(T_N^m) \nabla \mathbf{u}_N^m, \nabla(\ell_r \otimes \ell_s))_N + ((\mathbf{u}_N^m \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^m)(\xi_r, \xi_s) \rho_r \rho_s \\ & - (\operatorname{div} \ell_r \otimes \ell_s, p_N^m)_N - \mathbf{f}(\xi_r, \xi_s) \rho_r \rho_s, \quad 1 \leq r, s \leq N-1, \end{aligned}$$

Il s'écrit sous la forme $\mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}}\mathbf{M}$, où le vecteur $\bar{\mathbf{H}}$ a pour composantes les termes

$$\begin{aligned} & ((\mathbf{u}_N^m \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^m)(\xi_r, \xi_s) - \mathbf{f}(\xi_r, \xi_s) \\ & + \frac{1}{\rho_r \rho_s} \left[(\nu(T_N^m) \nabla \mathbf{u}_N^m, \nabla(\ell_r \otimes \ell_s))_N - (\operatorname{div} \ell_r \otimes \ell_s, p_N^m)_N \right], \quad 1 \leq r, s \leq N-1, \end{aligned}$$

La matrice \mathbf{M} est dite matrice de masse, est diagonale : les termes diagonaux sont les $\rho_r \rho_s$, $1 \leq r, s \leq N-1$.

- Le vecteur \mathbf{K} est formé par les termes

$$\begin{aligned} & ((\mathbf{u}_N^m \cdot \nabla) T_N^m)(\xi_r, \xi_s) - g(\xi_r, \xi_s) \rho_r \rho_s + \alpha(\nabla T_N^m, \nabla(\ell_r \otimes \ell_s))_N \\ & - \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} T_b^m(\xi_i, \xi_j) \left[\alpha(\nabla(\ell_i \otimes \ell_j), \nabla(\ell_r \otimes \ell_s))_N + ((\mathbf{u}_N^m \cdot \nabla) \ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s)_N \right], \quad 1 \leq r, s \leq N-1, \end{aligned}$$

Le vecteur \mathbf{K} s'écrit alors de façon plus naturelle sous la forme $\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}}\mathbf{M}$, où le vecteur $\bar{\mathbf{K}}$ a pour composantes les termes

$$\begin{aligned} & g(\xi_r, \xi_s) + ((\mathbf{u}_N^m \cdot \nabla) T_N^m)(\xi_r, \xi_s) - \frac{1}{\rho_r \rho_s} \left(\alpha(\nabla T_N^m, \nabla(\ell_r \otimes \ell_s))_N \right. \\ & \left. - \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}} T_b^m(\xi_i, \xi_j) \left[\alpha(\nabla(\ell_i \otimes \ell_j), \nabla(\ell_r \otimes \ell_s))_N + ((\mathbf{u}_N^m \cdot \nabla) \ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s)_N \right] \right), \quad 1 \leq r, s \leq N-1, \end{aligned}$$

Nous obtenons le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} A & B^T & 0 \\ B & 0 & 0 \\ D & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ 0 \\ \mathbf{K} \end{pmatrix} \quad (2.8.15)$$

2.9 Mise en œuvre

Avant de passer au calcul des coefficients des matrices, nous rappelons la formule suivante. Nous avons la formule

$$\ell'_i(\xi_r) = \begin{cases} \frac{L_N(\xi_r)}{L_N(\xi_i)(\xi_r - \xi_i)} & \text{si } 0 \leq i \neq r \leq N, \\ 0 & \text{si } 1 \leq i = r \leq N-1, \\ \frac{-N(N+1)}{4} & \text{si } i = r = 0, \\ \frac{N(N+1)}{4} & \text{si } i = r = N. \end{cases} \quad (2.9.1)$$

2.9.1 Calcul des matrices

• La matrice A_1

On se propose de calculer le terme général, $(\nu(T_N^m) \nabla(\ell_i \otimes \ell_j), \nabla(\ell_r \otimes \ell_s))_N$, de la matrice A_1 . On a

$$\begin{aligned} (\nu(T_N^m) \nabla(\ell_i \otimes \ell_j), \nabla(\ell_r \otimes \ell_s))_N &= \sum_{k,n=0}^N \nu(T_N^m)(\xi_k, \xi_n) ((\ell'_i \ell_j \ell'_r \ell_s)(\xi_k, \xi_n) + (\ell_i \ell'_j \ell_r \ell'_s)(\xi_k, \xi_n)) \rho_k \rho_n \\ &= \sum_{k=0}^N \nu(T_N^m)(\xi_k, \xi_j) (\ell'_i \ell'_r)(\xi_k) \rho_j \rho_k \delta_{js} \\ &\quad + \sum_{n=0}^N \nu(T_N^m)(\xi_i, \xi_n) (\ell'_j \ell'_s)(\xi_n) \rho_i \rho_n \delta_{ir} \end{aligned}$$

Si on pose

$$\begin{cases} \alpha_{ijr} = \sum_{n=0}^N \nu(T_N^m)(\xi_n, \xi_j) (\ell'_i \ell'_r)(\xi_n) \rho_n \\ \beta_{jis} = \sum_{n=0}^N \nu(T_N^m)(\xi_i, \xi_n) (\ell'_j \ell'_s)(\xi_n) \rho_n \end{cases} \quad (2.9.2)$$

alors on obtient :

$$(\nu(T_N^m) \nabla(\ell_i \otimes \ell_j), \nabla(\ell_r \otimes \ell_s))_N = \alpha_{ijr} \rho_j \delta_{js} + \beta_{jis} \rho_i \delta_{ir}. \quad (2.9.3)$$

où $\delta_{..}$ désigne le symbole de Kronecker.

On peut aussi combiner pour obtenir une relation entre α_{ijr} et β_{jis} d'une part, et les polynômes de Legendre d'autre part :

$$\begin{cases} \alpha_{ijr} = \sum_{n=0, n \neq i, n \neq r}^N \frac{2\nu(T_N^m)(\xi_n, \xi_j)}{N(N+1)L_N(\xi_i)L_N(\xi_r)(\xi_n - \xi_i)(\xi_n - \xi_r)}, \\ \beta_{jis} = \sum_{n=0, n \neq i, n \neq s}^N \frac{2\nu(T_N^m)(\xi_i, \xi_n)}{N(N+1)L_N(\xi_j)L_N(\xi_s)(\xi_n - \xi_s)(\xi_n - \xi_j)}. \end{cases} \quad (2.9.4)$$

• La matrice A_2

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_N^m \cdot \nabla) \ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s)_N &= (\mathbf{u}_{1N}^m \ell'_i \otimes \ell_j + \mathbf{u}_{2N}^m \ell_i \otimes \ell'_j, \ell_r \otimes \ell_s)_N \\ &= \mathbf{u}_{1N}^m(\xi_r, \xi_j) \ell'_i(\xi_r) \delta_{js} \rho_r \rho_j + \mathbf{u}_{2N}^m(\xi_r, \xi_s) \ell'_j(\xi_s) \delta_{ir} \rho_r \rho_s \end{aligned} \quad (2.9.5)$$

1) si $i = r$ et $j = s$, $A_2 = 0$.

2) si $i = r$ et $j \neq s$,

$$((\mathbf{u}_N^m \cdot \nabla) \ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s)_N = \frac{2\mathbf{u}_{2N}^m(\xi_r, \xi_s) \delta_{ri} \rho_r}{N(N+1) L_N(\xi_j) L_N(\xi_s) (\xi_s - \xi_j)},$$

3) si $i \neq r$ et $j = s$,

$$((\mathbf{u}_N^m \cdot \nabla) \ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s)_N = \frac{2\mathbf{u}_{1N}^m(\xi_r, \xi_j) \delta_{js} \rho_j}{N(N+1) L_N(\xi_r) L_N(\xi_i) (\xi_r - \xi_i)},$$

4) si $i \neq r$ et $j \neq s$,

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_N^m \cdot \nabla) \ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s)_N &= \frac{2\mathbf{u}_{2N}^m(\xi_r, \xi_s) \delta_{ri} \rho_r}{N(N+1) L_N(\xi_j) L_N(\xi_s) (\xi_s - \xi_j)} \\ &+ \frac{2\mathbf{u}_{1N}^m(\xi_r, \xi_j) \delta_{js} \rho_j}{N(N+1) L_N(\xi_r) L_N(\xi_i) (\xi_r - \xi_i)}. \end{aligned}$$

• La matrice A_3

$$\begin{aligned} ((\ell_i \otimes \ell_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^m, \ell_r \otimes \ell_s)_N &= (\ell_i \otimes \ell_j \frac{\partial \mathbf{u}_{1N}^m}{\partial x} + \ell_i \otimes \ell_j \frac{\partial \mathbf{u}_{2N}^m}{\partial y}, \ell_r \otimes \ell_s)_N \\ &= (\frac{\partial \mathbf{u}_{1N}^m}{\partial x}(\xi_r, \xi_s) + \frac{\partial \mathbf{u}_{2N}^m}{\partial y}(\xi_r, \xi_s)) \delta_{ir} \delta_{js} \rho_r \rho_s. \end{aligned}$$

• La matrice B

La matrice B est sous la forme

$$B = [B_1, B_2],$$

Pour déterminer le terme général de la matrice B_1 , il suffit de remarquer qu'on a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} b_1(\ell_i \otimes \ell_j, m_r \otimes m_s) &= - \sum_{k,n=0}^N \ell'_i(\xi_k) \ell_j(\xi_n) m_r(\xi_k) m_s(\xi_n) \rho_k \rho_n \\ &= b_2(\ell_j \otimes \ell_i, m_s \otimes m_r). \end{aligned}$$

Il suffit donc de calculer le terme général $b_2(\ell_j \otimes \ell_i, m_s \otimes m_r)$ associé à la matrice B_2 .

1) si $1 \leq i, j \leq N-1$ et $1 \leq r, s \leq N-1$, on a

$$b_2(\ell_j \otimes \ell_i, m_s \otimes m_r) = \delta_{sj} \rho_i \rho_j m'_r(\xi_i).$$

2) si $j = 0$, on a

$$b_2(\ell_0 \otimes \ell_i, m_s \otimes m_r) = m_s(\xi_0) \rho_0 m'_r(\xi_i) \rho_i, \quad \text{si } 1 \leq i, r, s \leq N-1.$$

3) si $j = N$, on a

$$b_2(\ell_N \otimes \ell_i, m_s \otimes m_r) = m_s(\xi_N) \rho_N m_r'(\xi_i) \rho_i, \quad \text{si } 1 \leq i, r, s \leq N-1.$$

4) si $i = 0$, on a

$$b_2(\ell_j \otimes \ell_0, m_s \otimes m_r) = \begin{cases} m_s(\xi_j) \rho_j (m_r'(\xi_0) \rho_0 + m_r(\xi_0)), & \text{si } j = 0 \text{ ou } N. \\ \delta_{sj} \rho_j (m_r'(\xi_0) \rho_0 + m_r(\xi_0)), & \text{si } 1 \leq j \leq N-1. \end{cases}$$

5) si $i = N$, on a

$$b_N(\ell_j \otimes \ell_N, m_s \otimes m_r) = \begin{cases} m_s(\xi_j) \rho_j (m_r'(\xi_N) \rho_N - m_r(\xi_N)), & \text{si } j = 0 \text{ ou } N. \\ \delta_{sj} \rho_j (m_r'(\xi_N) \rho_N - m_r(\xi_N)), & \text{si } 1 \leq j \leq N-1. \end{cases}$$

• La matrice C_1

on conclut de (2.9.3) et (2.9.4)

$$\alpha(\nabla(\ell_i \otimes \ell_j), \nabla(\ell_r \otimes \ell_s))_N = \alpha(\gamma_{ir} \rho_j \delta_{js} + \lambda_{js} \rho_i \delta_{ir}), \quad (2.9.6)$$

avec

$$\gamma_{ir} = \sum_{n=0, n \neq i, n \neq r}^N \frac{2}{N(N+1) L_N(\xi_i) L_N(\xi_r) (\xi_n - \xi_i) (\xi_n - \xi_r)},$$

et

$$\lambda_{js} = \sum_{n=0, n \neq j, n \neq s}^N \frac{2}{N(N+1) L_N(\xi_j) L_N(\xi_s) (\xi_n - \xi_j) (\xi_n - \xi_s)}.$$

• La matrice D

$$((\ell_i \otimes \ell_j \cdot \nabla) T_N^m, \ell_r \otimes \ell_s)_N = \left(\frac{\partial T_N^m}{\partial x}(\xi_r, \xi_s) + \frac{\partial T_N^m}{\partial y}(\xi_r, \xi_s) \right) \delta_{ir} \delta_{js} \rho_r \rho_s.$$

2.9.2 Algorithme d'Uzawa

Nous noterons que la matrice A est symétrique définie positive. La matrice B est rectangulaire, la matrice B^T désigne sa transposée et nous pouvons noter que la matrice BB^T est en général de taille beaucoup plus petite que la matrice A . L'algorithme habituellement utilisé pour résoudre les systèmes de type (2.8.15), présenté dans Arrow, Hurwicz et Uzawa [2], est appelé algorithme d'Uzawa, on le décrit maintenant. La propriété d'ellipticité entraîne que la matrice A est inversible, de sorte que la première ligne de (2.8.15) s'écrit de la façon équivalente

$$\tilde{U} = A^{-1}(\mathbf{H} - B^T \tilde{P}) \quad (2.9.7)$$

On insère alors cette expression dans la deuxième ligne de (2.8.15) et on obtient
Chercher \tilde{P} solution de

$$BA^{-1}B^T \tilde{P} = BA^{-1}\mathbf{H} \quad (2.9.8)$$

Ainsi, on cherche \tilde{T} solution de

$$C\tilde{T} = \mathbf{K} - D\tilde{U} \quad (2.9.9)$$

On arrive à découpler le calcul des trois inconnues \tilde{U} , \tilde{P} et \tilde{T} . On calcule d'abord \tilde{P} comme solution de (2.9.8), c'est-à-dire d'un système linéaire dont la matrice est d'ordre $(N-1)^2$. On a donc essentiellement divisé par 4 la taille du système. Dans une seconde étape, on effectue le calcul de \tilde{U} par (2.9.7) et dans une dernière étape, on effectue le calcul de \tilde{T} par (2.9.9).

La résolution du système (2.9.8), puis le système (2.9.7) ensuite le système (2.9.9) s'effectue par la méthode directe soit par méthode itérative. Comme la matrice $BA^{-1}B^T$ est symétrique, la méthode du gradient conjugué semble parfaitement appropriée pour résoudre ce système.

Remarque 2.9.1 *La matrice $BA^{-1}B^T$ peut également être inversée par diagonalisations successives, voir Zang et Hussaini [26].*

Remarque 2.9.2 *Le fait que les bases de polynômes soient tensorisées réduit le coût de l'opération matrice-vecteur, ainsi chaque itération nécessite au plus $cN^{\frac{3}{2}}$ opérations, et au total $\mathcal{N}(N)$ fois ce nombre pour converger, avec $\mathcal{N}(N)$ le nombre d'itérations nécessaire à la convergence. Le nombre de condition intervient dans ces méthodes par son influence sur le nombre d'itérations [16].*

2.10 Résultats numériques

La méthode pour la résolution de notre problème (2.8.6) a été programmée en Matlab. Nous avons choisi ce langage de programmation de calcul scientifique car le compilateur MATLAB® est performant et un script qui s'exécute très rapide. Cet avantage est nécessaire surtout que la méthode spectrale est très précise et s'applique à des polynômes de degré élevé (nous pouvons aller jusqu'à $N = 90$).

Concernant la représentation graphique, nous avons aussi choisi ce logiciel de calcul scientifique pour ces nombreuses fonctions prédéfinies et sa facilité d'apprentissage et d'utilisation. Les calculs sont effectués sous Linux au Laboratoire Jacques-Louis-Lions à l'Université Paris VI.

Cette section est consacrée à l'exploitation des résultats numériques obtenus avec notre code, dont l'objectif est de vérifier, numériquement, les résultats théoriques présentés auparavant. Nous proposons d'étudier le comportement de l'erreur entre les solutions exactes et les solutions numériques, et de vérifier les bonnes propriétés de convergence de l'algorithme proposé et étudié, conformément aux résultats théoriques.

Les tests sont effectués avec des solutions exactes connues ou inconnues, régulières et singulières de singularité différentes et pour différents cas pour la fonction v : constante, en tant que fonction qui dépend des variables de l'espace et en tant que fonction qui dépend de la température T .

Le comportement de l'erreur est mesuré en fonction du paramètre de discrétisation N , N étant le degré polynomial.

Le premier test est apporté par une vitesse régulière, s'écrit sous la forme

- 1er cas : $v(T)$ est égale à une constante 10^{-2}

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} y(1-x^2)^{\frac{11}{2}}(1-y^2)^{\frac{9}{2}} \\ -x(1-x^2)^{\frac{9}{2}}(1-y^2)^{\frac{11}{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.10.1)$$

$$p(x, y) = x^2 + y - \frac{1}{3}, \quad T(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{7}{2}}. \quad (2.10.2)$$

Nous représentons dans la Figure 2.1, les courbes de chacune des solutions discrète pour $N = 24$ et dans la Figure 2.2 l'erreur de la solution.

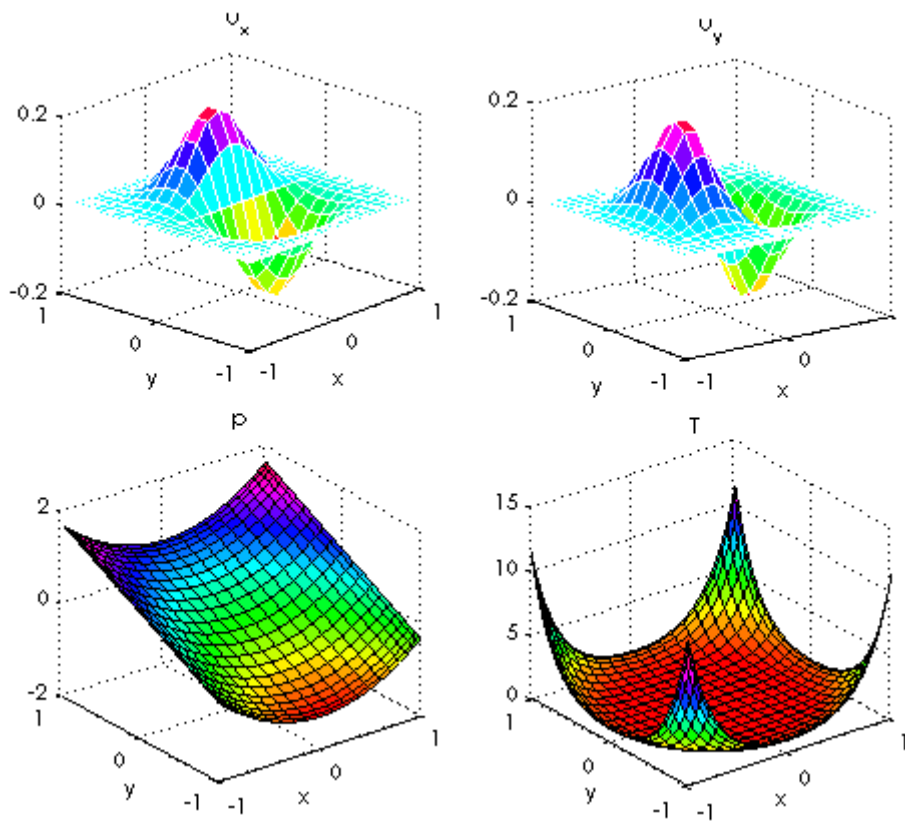


FIGURE 2.1 – Les courbes de la première et la deuxième composante de la vitesse (en haut) et de la fonction pression et température (en bas).

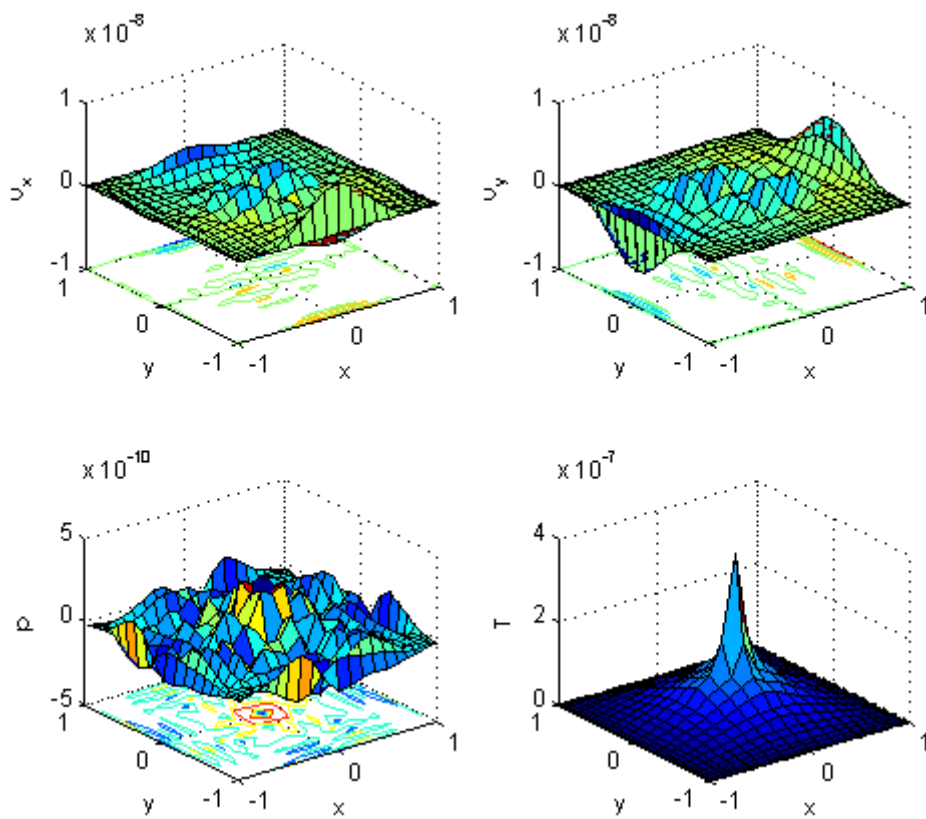


FIGURE 2.2 – L'erreur de la solution de (2.10.1) et (2.10.2) .

- 2ème cas : $v(T)$ est égale à une fonction $x + y + 1$

Pour le test suivant, nous gardons toujours la même solution (2.10.1) et (2.10.2). Dans les Figures 2.3, 2.4 et 2.5, nous représentons le logarithme décimal de l'erreur, en fonction du degré N , pour N variant de 8 à 30. Nous remarquons que l'erreur décroît rapidement quand N croît. Les pentes des droites trouvées sont donc négatives. Ces résultats confirment les estimations a priori obtenues dans les paragraphes précédents.

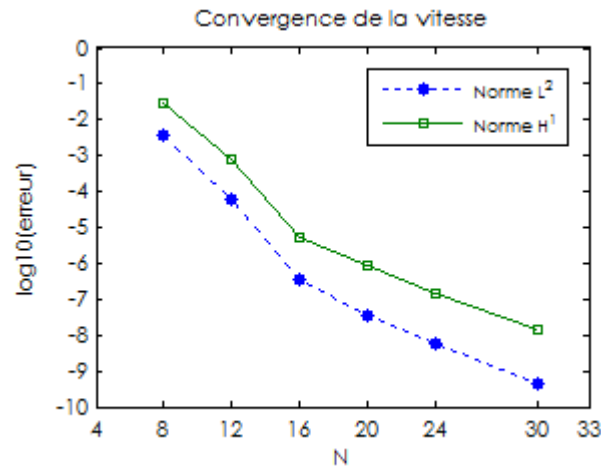


FIGURE 2.3 – Courbe de convergence en norme $L^2(\Omega)^2$ et $H^1(\Omega)^2$ de (2.10.1) et (2.10.2).

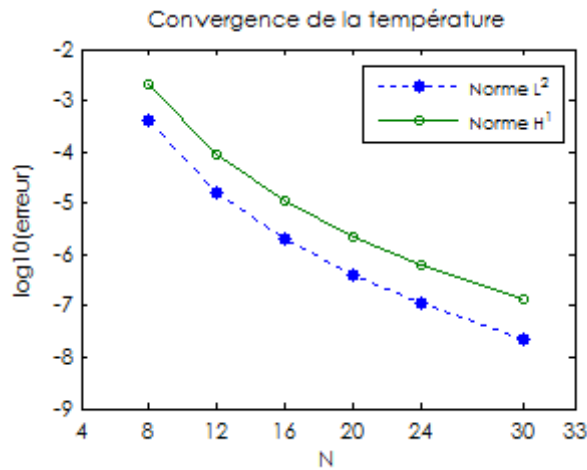


FIGURE 2.4 – Courbe de convergence en norme $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ de (2.10.1) et (2.10.2).

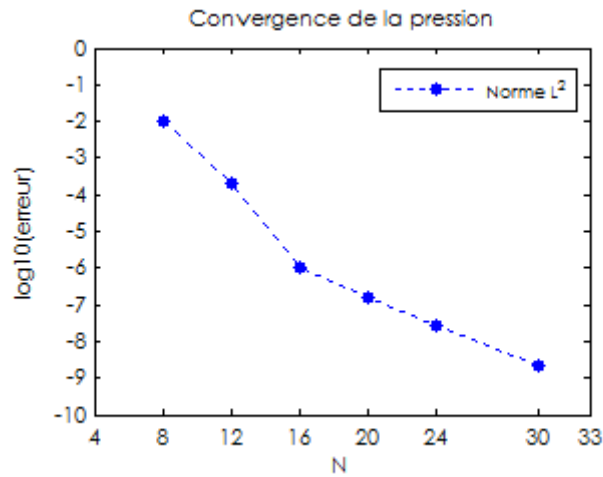


FIGURE 2.5 – Courbe de convergence en norme $L^2(\Omega)$ de (2.10.1) et (2.10.2).

• 3ème cas : $v(T)$ dépend de T

i) Nous nous intéressons maintenant au cas où la solution du problème est très régulière, nous choisissons pour cela l'approximation de la solution exacte suivante pour $v(T) = 3\sqrt{T^2 + 1} + 2$.

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad p(x, y) = \sin(x + y), \quad T(x, y) = \cos(xy). \quad (2.10.3)$$

Dans la Figure 2.6 nous représentons les courbes de chacune des solutions calculées pour $N = 24$ et dans la Figure 2.7 l'erreur de la solution.

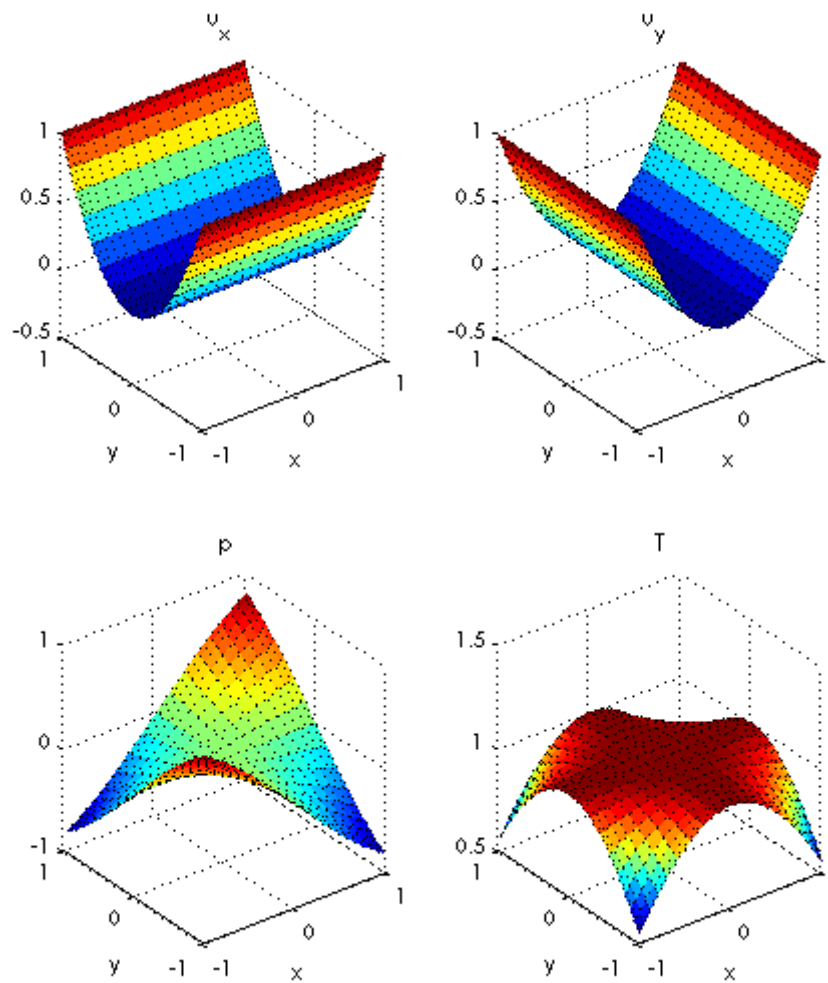


FIGURE 2.6 – Les courbes de la première et la deuxième composante de la vitesse (en haut) et de la pression et la température (en bas) calculée pour $N = 24$.

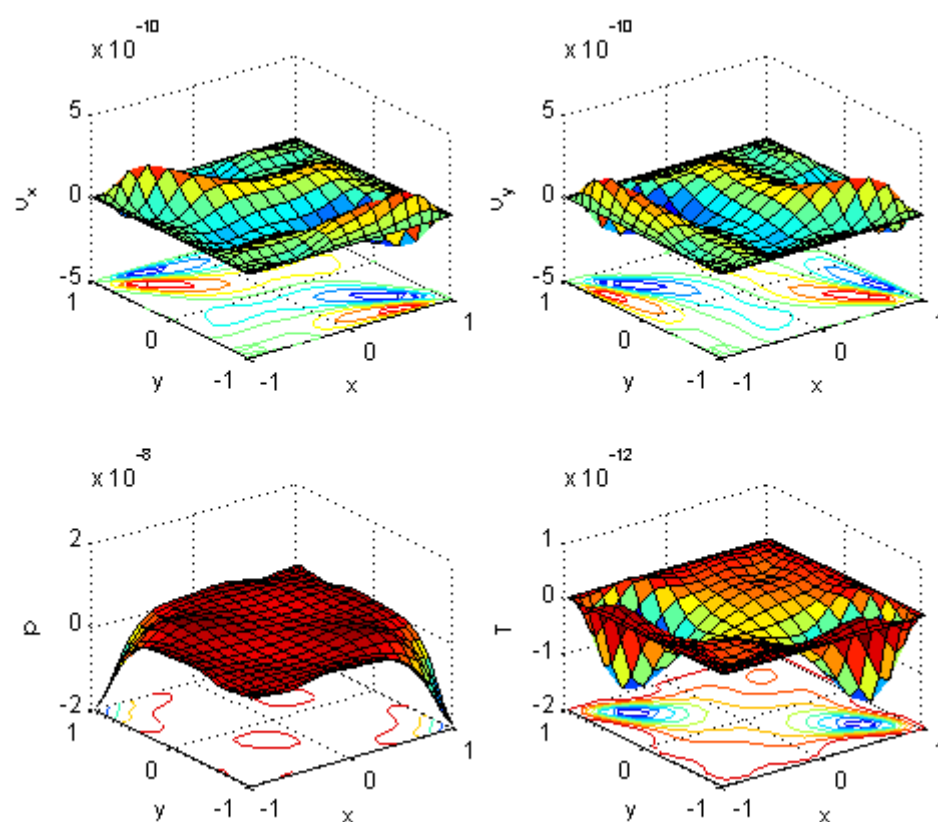


FIGURE 2.7 – L'erreur de la solution de 2.10.3.

ii) Nous considérons la solution suivante dans le cas où $\nu(T)$ est égale à $T + 1$

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} x \sin(\pi xy) \\ -y \sin(\pi xy) \end{pmatrix}, \quad p(x, y) = x + y, \quad T(x, y) = xy \quad (2.10.4)$$

Nous représentons dans les Figures 2.8 et 2.9 les courbes et les isovaleurs de chacune des solutions discrète pour $N = 24$.

Le tableau 2.1 suivant montre que la convergence est rapide, où (\mathbf{u}_N, p_N, T_N) est la solution calculée par notre code. Nous remarquons que pour atteindre une erreur d'approximation de l'ordre de 10^{-11} il nous a fallu augmenter le nombre de nœuds et donc le degré des polynômes pour avoir une bonne précision.

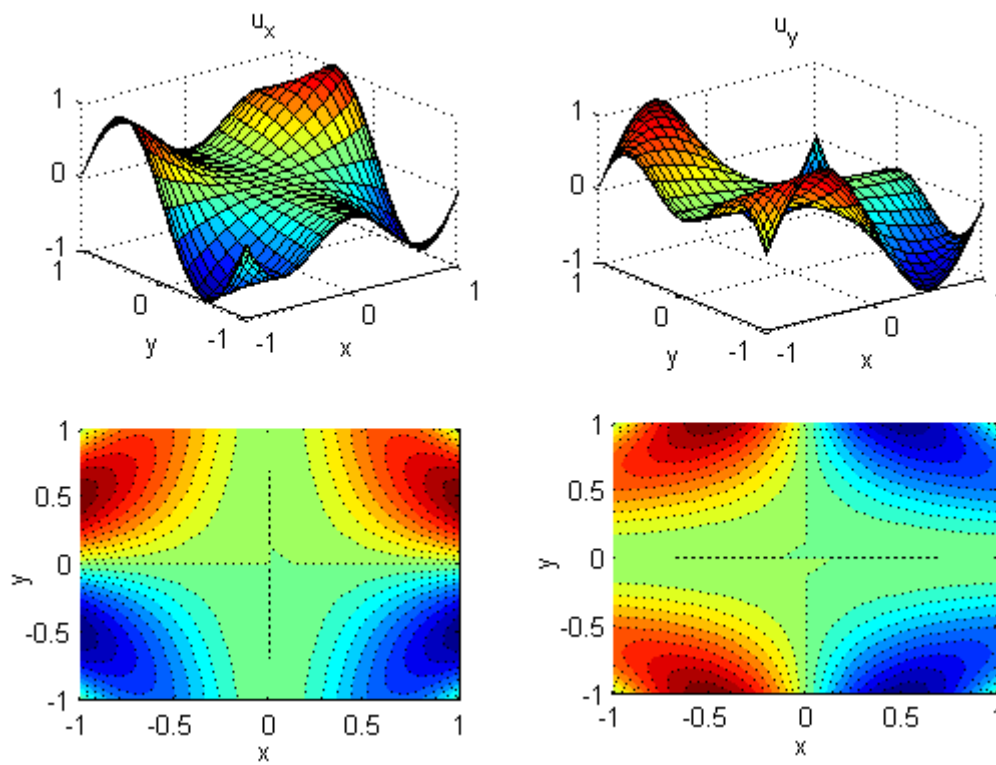


FIGURE 2.8 – Les courbes et les isovaleurs de la première et la deuxième composante de la vitesse calculée pour $N = 24$.

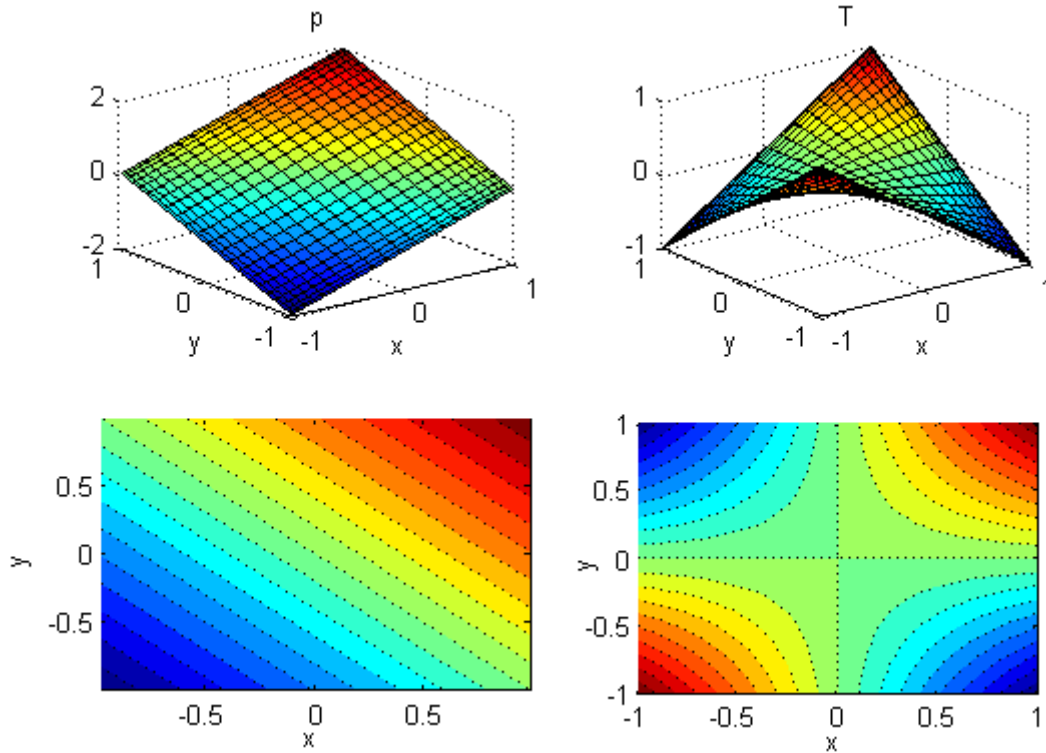


FIGURE 2.9 – Les courbes et les isovaleurs de la fonction pression et température calculée pour $N = 24$.

N	5	10	15
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_N\ _{L^2(\Omega)^2}$	2.890×10^{-4}	8.8915×10^{-8}	1.8808×10^{-11}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_N\ _{H^1(\Omega)^2}$	0.020×10^{-3}	7.2810×10^{-7}	3.0806×10^{-10}
$\ p - p_N\ _{L^2(\Omega)}$	0.023×10^{-3}	8.5108×10^{-7}	2.2726×10^{-10}
$\ T - T_N\ _{L^2(\Omega)}$	2.6811×10^{-6}	8.6595×10^{-10}	1.7411×10^{-13}
$\ T - T_N\ _{H^1(\Omega)}$	1.3887×10^{-5}	5.7321×10^{-9}	1.3640×10^{-12}

N	20	24
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_N\ _{L^2(\Omega)^2}$	7.1623×10^{-12}	4.1525×10^{-12}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_N\ _{H^1(\Omega)^2}$	9.6433×10^{-11}	5.7690×10^{-11}
$\ p - p_N\ _{L^2(\Omega)}$	1.1053×10^{-11}	6.2367×10^{-12}
$\ T - T_N\ _{L^2(\Omega)}$	8.3121×10^{-14}	5.2124×10^{-14}
$\ T - T_N\ _{H^1(\Omega)}$	4.5401×10^{-13}	2.2268×10^{-13}

TABLE 2.1 – Erreur relative en fonction de N de (2.10.4).

Nous traçons le comportement de la norme de l'erreur à l'échelle logarithmique, en fonction du degré $\log_{10}(N)$ pour N variant de 5 à 24, nous remarquons une meilleur convergence pour $N = 24$.

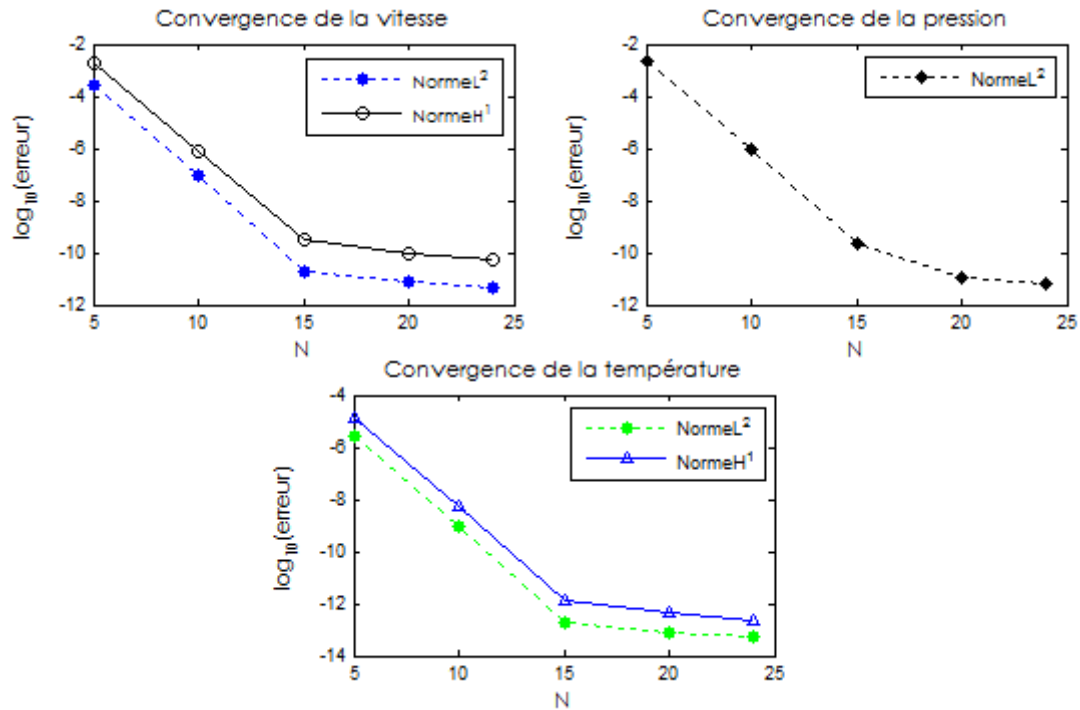


FIGURE 2.10 – Courbes de convergence de (2.10.4) en fonction de N.

iii) Avant de conclure cette section, nous présentons dans la suite la solution du problème de Navier-Stokes/chaleur dans le cas où $v(T)$ est égale à $T^2 + T$, pour les données aux bord suivantes

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 1 \text{ dans } \Omega,$$

la condition aux bord est remplacée par

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}, \quad T_b = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (2.10.5)$$

La vitesse aux bord $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$ est donnée par

$$h_x(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = \pm 1, \\ \sin(\pi x) & \text{sinon,} \end{cases} \quad h_y(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \pm 1, \\ \sin(\pi y) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.10.6)$$

Nous notons que la donnée satisfait la condition de compatibilité $\int_{\partial\Omega} \mathbf{h}(\tau) \cdot \mathbf{n}(\tau) d(\tau) = 0$. Nous présentons dans la Figure 2.11 les isovalues de la première et la deuxième composante de la vitesse, la pression et la température issu de la solution (2.10.6) calculée pour $N = 26$.

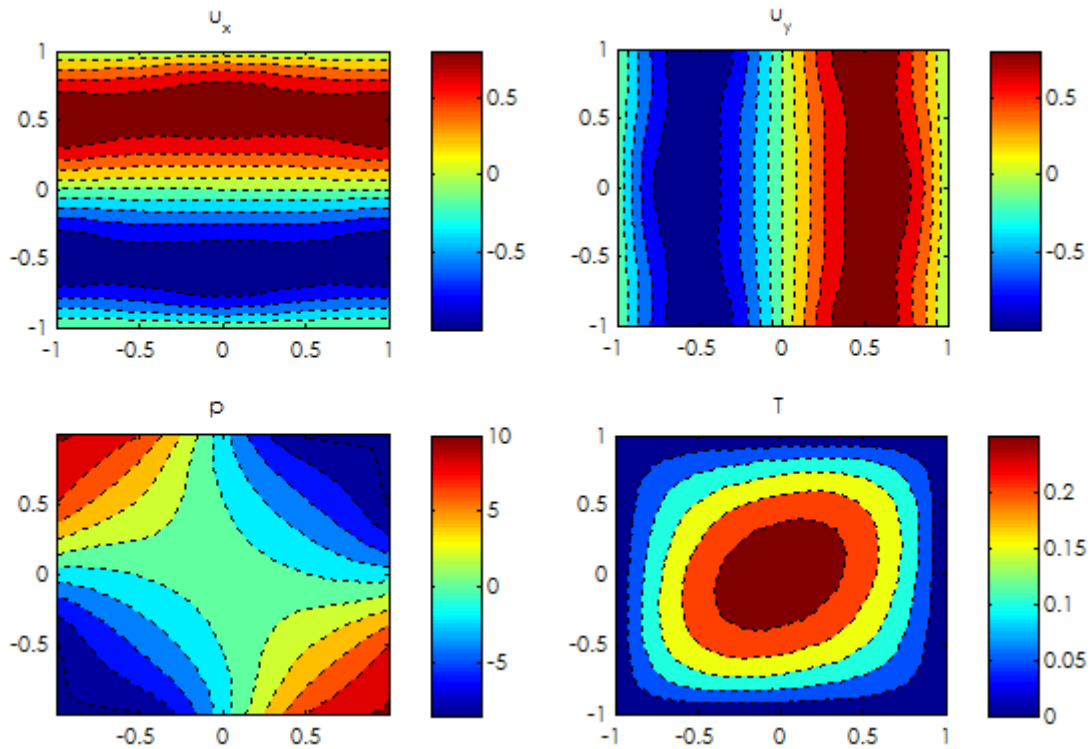


FIGURE 2.11 – Les isovalues de la solution discrète issu de (2.10.6).

iv) Enfin, nous représentons les résultats obtenus pour la solution suivante

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y) \cos(\pi y) \\ -2 \sin(\pi y)^2 \sin(\pi x) \cos(\pi x) \end{pmatrix}, \quad p(x, y) = x^2 - y^2, \quad T(x, y) = xy \quad (2.10.7)$$

Nous présentons dans le tableau 2.2 suivant des différentes valeurs de $v(T)$. Nous remarquons la stabilité de l'algorithme et la variation d'erreur de : vitesse, pression et température calculée avec $N = 16$.

$\nu(T)$	$T + 1$	$\frac{1}{25(T+1)}$	$\frac{1}{50(T+1)}$
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_N\ _{L^2(\Omega)^2}$	7.64×10^{-9}	1.48×10^{-8}	4.16×10^{-8}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_N\ _{H^1(\Omega)^2}$	8.76×10^{-8}	2.76×10^{-7}	4.23×10^{-7}
$\ p - p_N\ _{L^2(\Omega)}$	1.35×10^{-8}	4.16×10^{-8}	6.16×10^{-8}
$\ T - T_N\ _{L^2(\Omega)}$	4.23×10^{-11}	3.03×10^{-10}	4.06×10^{-10}
$\ T - T_N\ _{H^1(\Omega)}$	5.68×10^{-10}	9.18×10^{-10}	2.28×10^{-9}

$\nu(T)$	$\frac{1}{75(T+1)}$	$\frac{1}{100(T+1)}$
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_N\ _{L^2(\Omega)^2}$	5.50×10^{-8}	9.62×10^{-8}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_N\ _{H^1(\Omega)^2}$	7.67×10^{-7}	9.33×10^{-7}
$\ p - p_N\ _{L^2(\Omega)}$	9.02×10^{-8}	4.73×10^{-7}
$\ T - T_N\ _{L^2(\Omega)}$	8.39×10^{-10}	1.58×10^{-9}
$\ T - T_N\ _{H^1(\Omega)}$	5.21×10^{-9}	6.93×10^{-9}

TABLE 2.2 – Convergence de la solution (2.10.7) en fonction de $\nu(T)$.

Remarque 2.10.1 Nous notons que la précision de convergence diminue si $\nu(T)$ diminue mais reste stable. Donc, pour surmonter cet handicap, nous devrions augmenter le paramètre de discrétisation N : par exemple en prenant $N = 18$ et $\nu(T) = \frac{1}{100(T+1)}$ nous avons atteint la précision de $N = 16$ et $\nu(T) = T + 1$.

Deuxième partie

Analyse du problème instationnaire

Équations de Navier-Stokes/chaleur instationnaires

Ce chapitre aborde la version instationnaire du problème étudié dans le chapitre 1. Il est organisé en trois sections. Dans la première section, nous présentons les équations que nous allons étudier. La deuxième section, concerne les équations dépendant du temps, pour lesquelles nous présentons les outils mathématiques. Et dans la troisième section, nous donnons une formulation variationnelle des équations. Nous étudions l'existence et l'unicité (en dimension $d = 2$) de la solution.

3.1 Présentation des équations

Nous considérons un intervalle de temps $[0, \tilde{T}]$, $\tilde{T} > 0$. Nous présentons les équations étudiées

l'équation de Navier-Stokes

$$\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div}(\nu(T(\mathbf{x}, t)) \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \text{ dans } \Omega \times]0, \tilde{T}[, \quad (3.1.1)$$

avec la condition d'incompressibilité

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times]0, \tilde{T}[, \quad (3.1.2)$$

l'équation de chaleur

$$\partial_t T(\mathbf{x}, t) - \alpha \Delta T(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) T(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t), \quad \text{dans } \Omega \times]0, \tilde{T}[, \quad (3.1.3)$$

la condition aux limites

$$T(\mathbf{x}, t) = T_b, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, \tilde{T}[, \quad (3.1.4)$$

et la condition initiale

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0, \quad T(\mathbf{x}, 0) = T_0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.1.5)$$

où les inconnues \mathbf{u} , p et T désignent respectivement le champ de vitesse, la pression et la température du fluide.

Toutes les quantités sont évaluées au point (\mathbf{x}, t) , où

$$\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d,$$

désigne la position et $t \in [0, \tilde{T}]$ représente le temps. La fonction f représente une densité de forces extérieures appliquée au fluide et la fonction g est une donnée.

Pour avoir une solution, nous complétons les équations (3.1.1), (3.1.3) et (3.1.2) par des conditions aux limites (3.1.4) et une condition initiale (3.1.5).

Remarque 3.1.1 *Les termes sources, la condition initiale et les données aux bords ne peuvent pas être totalement indépendants. Toutes ces données doivent être compatibles entre elles. Par exemple, la condition initiale doit être à divergence nulle pour vérifier la condition d'incompressibilité, mais ce n'est pas nécessaire pour prouver l'existence de la solution.*

Remarque 3.1.2 *Dans ce cadre, la pression n'a plus sa signification thermodynamique habituelle. Aucune condition initiale n'est imposée sur la pression. Son rôle est comparable à un multiplicateur de Lagrange qui assure à tout instant que la contrainte d'incompressibilité est satisfaite.*

3.2 Outils mathématiques

Nous introduisons tout d'abord quelques notions permettant de préciser le cadre fonctionnel des fonctions dépendant du temps.

Soit $\tilde{T} > 0$ un réel fixé. Nous définissons le domaine espace temps $\Omega \times]0, \tilde{T}[$. Une fonction $u(\mathbf{x}, T)$ définie sur $\Omega \times]0, \tilde{T}[$ peut alors être vu de la façon suivante

$$\begin{aligned} u :]0, \tilde{T}[&\longrightarrow X \\ t &\longmapsto u(t) = u(\cdot, t) \end{aligned}$$

où X est un espace de Hilbert séparable dont les éléments sont des fonctions définies sur Ω . Par la suite, nous définissons l'espace $\mathcal{C}^j(0, \tilde{T}; X)$ comme étant l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^j en t à valeurs dans X , nous notons $\partial_t u$ la dérivée de u par rapport à t et $\partial_t^l u$ la dérivée d'ordre l . Un résultat d'analyse fonctionnelle montre que $\mathcal{C}^j(0, \tilde{T}; X)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{\mathcal{C}^j(0, \tilde{T}; X)} = \sup_{0 \leq t \leq \tilde{T}} \sum_{l=0}^j \|\partial_t^l u(t)\|_X,$$

voir [23, Chapitre 7], pour plus de détails.

Nous définissons aussi l'espace

$$L^p(0, \tilde{T}; X) = \left\{ v \text{ mesurable dans }]0, \tilde{T}[; \int_0^{\tilde{T}} \|v(t)\|_X^p dt < \infty \right\},$$

pour la norme

$$\|u\|_{L^p(0, \tilde{T}; X)} = \begin{cases} \left(\int_0^{\tilde{T}} \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{pour } 1 \leq p < +\infty, \\ \sup_{t \in]0, \tilde{T}[} \|u(t)\|_X, & \text{pour } p = +\infty. \end{cases}$$

C'est un espace de Banach si X est un espace de Banach.

Les problèmes d'évolution en temps tels que notre problème sont des problèmes aux limites initiales. Il est alors important de savoir pour quel type de fonction sur $]0, \tilde{T}[\times \Omega$ il est légitime de parler de la valeur en $\{0\} \times \Omega$. Pour répondre à cette question, nous définissons l'espace suivant

$$H^s(0, \tilde{T}; X) = \{v \in L^2(0, \tilde{T}; X); \partial^k v \in L^2(0, \tilde{T}; X), \forall k \leq s\}.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|v\|_{H^s(0, \tilde{T}; X)} = \left(\|v\|_{L^2(0, \tilde{T}; X)}^2 + \sum_{k=1}^s \|\partial^k v\|_{L^2(0, \tilde{T}; X)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est un espace de Hilbert. L'espace $L^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega))$ est un espace de Hilbert et en particulier $L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))$ coïncide avec $L^2(]0, \tilde{T}[\times \Omega)$.

3.3 Étude du problème continu

3.3.1 Formulation variationnelle

Pour résoudre le problème nous supposons que les données (f, g, T_b) vérifient

$$f \in L^2(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d), \quad g \in L^2(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega))$$

$$T_b \in L^2(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)),$$

la donnée T_0 appartient à $L^2(\Omega)$ et la donnée u_0 appartient à $L^2(\Omega)^d$ satisfaisant la condition d'incompressibilité

$$\operatorname{div} u_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.3.1)$$

Remarque 3.3.1 Comme il a été déjà dit dans la Remarque 3.1.1, cette dernière condition n'est pas nécessaire pour tous les résultats dans cette section mais puisqu'elle n'est pas restrictive nous préférons l'assumer dorénavant.

Nous proposons la formulation variationnelle du problème (3.1.1)–(3.1.2)–(3.1.3)–(3.1.4)–(3.1.5),

Trouver $(u, p, T) \in L^2(0, \tilde{T}; H_0^1(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; L_0^2(\Omega)) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$ tel que :

$$u(., 0) = u_0, \quad \text{et} \quad T(., 0) = T_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.3.2)$$

tel que, pour p.t. t , $0 \leq t \leq \tilde{T}$,

$$T(., t) = T_b(., t) \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.3.3)$$

et tel que, pour p.t. t , $0 \leq t \leq \tilde{T}$,

$$\begin{aligned}
 \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad & \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nu(T)(\mathbf{x}, t) (\mathbf{grad} \mathbf{u})(\mathbf{x}, t) : (\mathbf{grad} \mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}, \\
 \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad & - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})(\mathbf{x}, t) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \\
 \forall S \in H_0^1(\Omega), \quad & \int_{\Omega} \partial_t T(\mathbf{x}, t) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} (\mathbf{grad} T)(\mathbf{x}, t) \cdot (\mathbf{grad} S)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) T)(\mathbf{x}, t) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle g, S \rangle_{\Omega},
 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Par les mêmes arguments que dans la proposition 1.2.1 nous vérifions que :

- 1) Toute solution du problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4) est solution du problème (3.1.1)–(3.1.2)–(3.1.3)–(3.1.4)–(3.1.5) au sens des distributions.
- 2) Toute solution du problème (3.1.1)–(3.1.2)–(3.1.3)–(3.1.4)–(3.1.5) appartenant à $L^2(0, \tilde{T}; H_0^1(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; L_0^2(\Omega)) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$ est solution du problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4).

3.3.2 Existence et unicité de la solution

Nous introduisons les outils nécessaire pour prouver l'existence de la solution. Pour cela, nous procédons comme dans le cas stationnaire du chapitre 1 : pour tout t , $0 \leq t \leq \tilde{T}$,

$$\overline{T}_b(t) = \mathcal{R}T_b(t)$$

Il est clair que la fonction \overline{T}_b appartienne à $L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$ et satisfait en conservant la même constante c_{\diamond} de (1.2.9) l'inégalité suivante

$$\forall t \in [0, \tilde{T}], \quad \|\overline{T}_b\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} \leq c_{\diamond} \|T_b\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \tag{3.3.5}$$

Ainsi, nous posons,

$$T^* = T - \overline{T}_b,$$

et nous remarquons que (\mathbf{u}, p, T^*) est une solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } (\mathbf{u}, p, T^*) \in L^2(0, \tilde{T}; H_0^1(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; L_0^2(\Omega)) \times L^2(0, \tilde{T}; H_0^1(\Omega)) \text{ vérifiant} \\
 & \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{and} \quad T^*(\cdot, 0) = T_0 - \overline{T}_b(\cdot, 0) \quad \text{dans } \Omega,
 \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

et tel que, pour p.t. t , $0 \leq t \leq \tilde{T}$,

$$\begin{aligned}
 \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad & (\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\nu(T^* + \overline{T}_b) \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{u}, p) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}, \\
 \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad & -(\operatorname{div} \mathbf{u}, q) = 0, \\
 \forall S \in H_0^1(\Omega), \quad & (\partial_t T^*, S) + \alpha(\nabla T^*, \nabla S) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) T^*, S) \\
 & = \langle g, S \rangle_{\Omega} - (\partial_t \overline{T}_b, S) - \alpha(\nabla \overline{T}_b, \nabla S) - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \overline{T}_b, S),
 \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Nous faisons appel à l'espace $V(\Omega)$ défini dans (1.2.4), nous pouvons ainsi éliminer l'inconnu p dans (3.3.7) en prenant les fonctions test dans l'espace $V(\Omega)$. Alors nous avons une deuxième formulation variationnelle.

Trouver $(\mathbf{u}, T^*) \in L^2(0, \tilde{T}; V(\Omega)) \times L^2(0, \tilde{T}; H_0^1(\Omega))$ vérifiant (3.3.6) tel que, pour p.t $t, 0 \leq t \leq \tilde{T}$,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \quad (\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\nu(T^* + \bar{T}_b) \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega, \\ \forall S \in H_0^1(\Omega), \quad (\partial_t T^*, S) + \alpha(\nabla T^*, \nabla S) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) T^*, S) & \\ &= \langle g, S \rangle_\Omega - (\partial_t \bar{T}_b, S) - \alpha(\nabla \bar{T}_b, \nabla S) - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \bar{T}_b, S), \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

A ce niveau, nous sommes sur le point de prouver le théorème fondamental de ce paragraphe sur l'existence de la solution (\mathbf{u}, p, T) du problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4).

Théorème 3.3.1

Si (\mathbf{u}, T^*) est une solution du problème (3.3.2)–(3.3.8), alors le problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4) admet une solution $(\mathbf{u}, p, T = T^* + \bar{T}_b)$ dans l'espace

$$L^2(0, \tilde{T}; H_0^1(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; L_0^2(\Omega)) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)).$$

Démonstration. 1) On commence par montrer l'existence de la solution (\mathbf{u}, T) pour cela en utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration du théorème 1.2.1, il existe une suite croissante \mathbb{V}_n de sous-espaces de dimension finie de $V(\Omega)$ et une suite croissante \mathbb{W}_n de sous-espaces de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$ tel que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{V}_n \times \mathbb{W}_n$ est dense

dans $V(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Ainsi le problème (3.3.8) s'écrit

Trouver $(\mathbf{u}_n, T_n^*) \in L^2(0, \tilde{T}; \mathbb{V}_n) \times L^2(0, \tilde{T}; \mathbb{W}_n)$,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_n \in \mathbb{V}_n, \quad (\partial_t \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) + (\nu(T_n^* + \bar{T}_b) \nabla \mathbf{u}_n, \nabla \mathbf{v}_n) + ((\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_n \rangle_\Omega, \\ \forall S_n \in \mathbb{W}_n, \quad (\partial_t T_n^*, S_n) + \alpha(\nabla T_n^*, \nabla S_n) + ((\mathbf{u}_n \cdot \nabla) T_n^*, S_n) & \\ &= \langle g, S_n \rangle_\Omega - (\partial_t \bar{T}_b, S_n) - \alpha(\nabla \bar{T}_b, \nabla S_n) - ((\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \bar{T}_b, S_n), \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

On considère l'application suivante

$$(\mathbf{w}, z) \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{f} + \operatorname{div}(\nu(z + \bar{T}_b) \nabla \mathbf{w}) - (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w}, \\ g - \partial_t \bar{T}_b + \alpha \Delta \bar{T}_b - (\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \bar{T}_b - (\mathbf{u}_n \cdot \nabla) z + \alpha \Delta z. \end{pmatrix}$$

est lipschitzienne sur $H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$. Ainsi, en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz, voir [34, Section 21], le problème (3.3.9) admet une unique solution (\mathbf{u}_n, T_n^*) dans $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; \mathbb{V}_n) \times \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; \mathbb{W}_n)$.

Comme \mathbf{u}_n appartient à $L^2(0, \tilde{T}; H_0^1(\Omega)^d)$ et T_n^* appartient à $L^2(0, \tilde{T}; H_0^1(\Omega))$ et que leurs normes sont bornées par une constante c grâce à l'inégalité de Poincaré-Friedrichs sur Ω . Il existe une sous-suite notée encore par $(\mathbf{u}_n, T_n^*)_n$ pour simplifier qui converge vers le couple (\mathbf{u}, T^*) faiblement dans $L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$.

On remarque que, pour tout $m \leq n$, (\mathbf{u}_n, T_n^*) est solution du problème suivant

Trouver $(\mathbf{u}_n, T_n^*) \in L^2(0, \tilde{T}; \mathbb{V}_n) \times L^2(0, \tilde{T}; \mathbb{W}_n)$ tel que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_m \in \mathbb{V}_m, \quad (\partial_t \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_m) + (\nu(T_n^* + \bar{T}_b) \nabla \mathbf{u}_n, \nabla \mathbf{v}_m) + ((\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_m) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_m \rangle_\Omega \\ \forall S_m \in \mathbb{W}_m, \quad (\partial_t T_n^*, S_m) + \alpha(\nabla T_n^*, \nabla S_m) + ((\mathbf{u}_n \cdot \nabla) T_n^*, S_m) & \\ &= \langle g, S_m \rangle_\Omega - (\partial_t \bar{T}_b, S_m) - \alpha(\nabla \bar{T}_b, \nabla S_m) - ((\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \bar{T}_b, S_m), \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

En prenant S_m égale à $\partial_t T_n^*$ dans (3.3.10), on déduit que $\partial_t T_n^*$ est borné dans $L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))$. Grâce à l'injection compacte de $H^1(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$ dans $L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))$, il existe une autre sous-suite $(T_n^*)_n$ telle que la suite $(\nu(T_n^* + \bar{T}_b) \nabla \mathbf{v}_m)_n$ converge vers $\nu(T^* + \bar{T}_b) \nabla \mathbf{v}_m$ a.e. dans Ω . Comme la norme de $(\nu(T_n^* + \bar{T}_b) \nabla \mathbf{v}_m)_n$ est bornée par $\nu_2 \|\nabla \mathbf{v}_m\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}$, en utilisant le théorème de convergence dominée, on déduit la convergence de $(\nu(T_n^* + \bar{T}_b) \nabla \mathbf{v}_m)_n$ vers $\nu(T^* + \bar{T}_b) \nabla \mathbf{v}_m$ dans $L^2(\Omega)^{d \times d}$. Pour la convergence du terme non linéaire, (voir plus de détails [38, Chap. III, Lemma 3.2]), on a

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_m) &= -((\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_n) \\ &= - \sum_{i,j=1}^d \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{u}_n)_i (D_i(\mathbf{v}_m)_j) (\mathbf{u}_n)_i dx dt, \end{aligned}$$

qui converge vers

$$- \sum_{i,j=1}^d \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{u})_i (D_i(\mathbf{v}_m)_j) (\mathbf{u})_i dx dt = -((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}_m, \mathbf{u}) = ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}_m).$$

Ainsi, en passant à la limite sur n , le problème (3.3.10) s'écrit :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{u}, T^*) \in L^2(0, \tilde{T}; V(\Omega)) \times L^2(0, \tilde{T}; H_0^1(\Omega)) \text{ tel que} \\ &\forall \mathbf{v}_m \in \mathbb{V}_m, \quad (\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{v}_m) + (\nu(T^* + \bar{T}_b) \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}_m) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}_m) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_m \rangle_{\Omega}, \\ &\forall S_m \in \mathbb{W}_m, \quad (\partial_t T^*, S_m) + \alpha(\nabla T^*, \nabla S_m) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) T^*, S_m) \\ &\quad = \langle \mathbf{g}, S_m \rangle_{\Omega} - (\partial_t \bar{T}_b, S_m) - \alpha(\nabla \bar{T}_b, \nabla S_m) - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \bar{T}_b, S_m), \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Finalement, en passant à la limite sur m et par densité de $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{V}_m \times \mathbb{W}_m$ dans $V(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, on déduit que le couple $(\mathbf{u}, T = T^* + \bar{T}_b)$ satisfait la première et la troisième équation du problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4).

2) En intégrant la première équation de (3.3.8) entre 0 et t , et en appliquant (3.3.2), nous définissons la fonctionnelle suivante, pour tout \mathbf{v} dans $H_0^1(\Omega)^d$

$$\begin{aligned} L_t(\mathbf{v}) &= \int_0^t \langle \mathbf{f}(\cdot, s), \mathbf{v} \rangle_{\Omega} - (\nu((T^* + \bar{T}_b)(\cdot, s)) \nabla \mathbf{u}(\cdot, s), \nabla \mathbf{v}) - ((\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\cdot, s), \mathbf{v}) ds \\ &\quad - (\mathbf{u}(\cdot, t), \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Pour tout t dans $[0, \tilde{T}]$, la fonctionnelle L_t est linéaire continue dans $H^1(\Omega)^d$, et d'après (3.3.2)–(3.3.8) elle s'annule sur $V(\Omega)$. Grâce à la condition inf-sup (1.2.5) et à Girault et Raviart [24, Chap. I, Lemme 2.1], pour chaque $t \in [0, \tilde{T}]$, il existe une fonction $P(t)$ de $L_0^2(\Omega)$ telle que :

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad L_t(\mathbf{v}) = -(\operatorname{div} \mathbf{v}, P(t)), \quad (3.3.12)$$

$$\|P(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d} \frac{L_t(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d}}. \quad (3.3.13)$$

En dérivant par rapport à la variable t , et en posant

$$p = \partial_t P(t),$$

on obtient la première équation de (3.3.4).

Nous commençons par établir une estimation *a priori* sur la vitesse.

Lemme 3.3.1

Supposons que la donnée \mathbf{f} appartienne à $L^2(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d)$, et que la vitesse initiale \mathbf{u}_0 dans $L^2(\Omega)^d$ et vérifiant (3.3.1). Alors nous établissons une estimation *a priori* sur la vitesse \mathbf{u} solution du problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4), pour tout $t \in]0, \tilde{T}[$

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)^d)} \leq c (\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d)}), \quad (3.3.14)$$

où c est une constante dépendant uniquement de Ω et \tilde{T} .

Démonstration. Nous prenons \mathbf{v} égal à \mathbf{u} dans l'équation (3.3.4), on obtient

$$(\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\nu(T) \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\operatorname{div} \mathbf{u}, p) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\Omega}.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \nu_1 \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq c \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d},$$

En utilisons l'inégalité de Young

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \nu_1 c \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d}^2 \leq \frac{c}{\nu_1} \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d}^2,$$

En intégrant entre 0 et t on obtient

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \nu_1 c \int_0^t \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{H^1(\Omega)^d}^2 ds \leq \|\mathbf{u}(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{c}{\nu_1} \int_0^t \|\mathbf{f}(\cdot, s)\|_{H^{-1}(\Omega)^d}^2 ds. \quad (3.3.15)$$

En combinant avec (3.3.2), on déduit l'estimation désiré.

Théorème 3.3.2

Supposons que les données

$$(\mathbf{f}, g, T_b) \in L^2(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)) \times L^2(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)),$$

et que la vitesse initiale \mathbf{u}_0 dans $L^2(\Omega)^d$ et vérifie (3.3.1), la température initiale dans $L^2(\Omega)$ et la température initiale sur la frontière T_b^0 dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Alors le problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4) admet une solution (\mathbf{u}, p, T) dans l'espace

$$L^2(0, \tilde{T}; H_0^1(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; L_0^2(\Omega)) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)).$$

Cette solution vérifie l'estimation *a priori* suivante, pour tout $t \in]0, \tilde{T}[$

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)^d)} + \|T\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} \\ & \leq c (\|T_0\|_{L^2(\Omega)} + \|T_b^0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d)} \\ & \quad + \|T_b\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}^2 + \|g\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega))}). \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Démonstration. L'existence de la solution (\mathbf{u}, p, T) du problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4) a été montrée dans le théorème 3.3.1. Pour prouver l'estimation comme

$$T = T^* + \overline{T}_b,$$

est solution du problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4), en prenant S égal à T^* dans la troisième équation de (3.3.4), on obtient

$$(\partial_t T^*, T^*) + \alpha(\nabla T^*, \nabla T^*) = \langle g, T^* \rangle_\Omega - (\partial_t \overline{T}_b, T^*) - \alpha(\nabla \overline{T}_b, \nabla T^*) - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \overline{T}_b, T^*).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $H^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^4(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha c \|T^*\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq c \left(\|g\|_{H^{-1}(\Omega)} \|T^*\|_{H^1(\Omega)} + \|\partial_t \overline{T}_b\|_{L^2(\Omega)} \|T^*\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \alpha \|\overline{T}_b\|_{H^1(\Omega)} \|T^*\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d} \|\overline{T}_b\|_{H^1(\Omega)} \|T^*\|_{H^1(\Omega)} \right) \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Young, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha c \|T^*\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c \left(\|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\overline{T}_b\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{c'}{2} (\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d}^2 + \|\overline{T}_b\|_{H^1(\Omega)}^2)^2 \right)$$

En intégrant entre 0 et t , et en utilisant (3.3.5) on aura,

$$\begin{aligned} \|T^*(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha c \int_0^t \|T^*(\cdot, s)\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \\ \leq c \left(\|T^*(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|g(\cdot, s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|\overline{T}_b(\cdot, s)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 ds \right. \\ \left. + \frac{c'}{2} \left(\int_0^t \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{H^1(\Omega)^d}^2 ds + \int_0^t \|\overline{T}_b(\cdot, s)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 ds \right)^2 \right). \end{aligned}$$

En utilisant (3.3.6) et l'inégalité (3.3.14), on aura

$$\begin{aligned} \|T^*\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega))} &\leq c \left(\|T_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\overline{T}_b^0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,t;H^{-1}(\Omega)^d)} \right. \\ &\quad \left. + \|\overline{T}_b\|_{L^2(0,t;H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}^2 + \|g\|_{L^2(0,t;H^{-1}(\Omega))} \right). \end{aligned}$$

Une inégalité triangulaire mène au résultat désiré.

Dans le théorème suivant, on se limite à la dimension $d = 2$.

Théorème 3.3.3

On suppose que la fonction v est lipschitzienne et on désigne par v^\diamond la constante de Lipschitz. Il existe deux constante positive c_\sharp^\diamond et c_b^\diamond telles que

(i) si les données $(\mathbf{f}, g, T_b) \in L^2(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)^2) \times L^2(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)) \times L^2(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$, \mathbf{u}_0 dans $L^2(\Omega)^2$ et T_b^0 dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ vérifient

$$\begin{aligned} c_\sharp^\diamond \left(\|T_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\overline{T}_b^0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,\tilde{T};H^{-1}(\Omega)^2)}^2 \right. \\ \left. + \|\overline{T}_b\|_{L^2(0,\tilde{T};H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}^2 + \|g\|_{L^2(0,\tilde{T};H^{-1}(\Omega))} \right) < 1, \end{aligned}$$

(ii) si le problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4) admet une solution (\mathbf{u}, p, T) telle que \mathbf{u} dans $L^2(0, \tilde{T}; W^{1,q}(\Omega)^2)$ avec $q > 2$ et satisfaisant

$$c_b^\diamond v^\diamond |\mathbf{u}|_{L^2(0, \tilde{T}; W^{1,q}(\Omega)^2)} < 1, \quad (3.3.17)$$

Alors, cette solution est unique.

Démonstration. On pose

$$c_1^\diamond = c(\|T_0\|_{L^2(\Omega)} + \|T_b^0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)^2)}^2 \\ + \|T_b\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}^2 + \|g\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega))}).$$

où c est la constante dans (3.3.16).

Soient (\mathbf{u}_1, p_1, T_1) et (\mathbf{u}_2, p_2, T_2) deux solutions du problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4) avec \mathbf{u}_1 dans $L^2(0, \tilde{T}; W^{1,q}(\Omega)^2)$ satisfaisant (3.3.17).

On pose

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \quad p = p_1 - p_2 \quad \text{et} \quad T = T_1 - T_2.$$

On procède en deux étapes :

1) Comme T est dans $H_0^1(\Omega)$, on utilise la troisième équation du problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4) pour S égale à T on aura

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \int_{\Omega} (\mathbf{grad} T)^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) T_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) T_2)(\mathbf{x}, t) T(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0,$$

En utilisant (1.2.16), on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\nabla T(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^4(\Omega)^2} \|\nabla T_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \|T(\cdot, t)\|_{L^4(\Omega)}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|T(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c_1^\diamond c_2^\diamond \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega)^2} \|T(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega)},$$

où c_2^\diamond est la norme de l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$.

En intégrant entre 0 et t , on déduit,

$$\alpha c \|T\|_{L^2(0, t; H^1(\Omega))} \leq c_1^\diamond c_2^\diamond \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, t; H^1(\Omega)^2)}, \quad (3.3.18)$$

2) Similairement, on déduit d'après la première équation du problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4) qu'en prenant v égale à \mathbf{u} , on obtient

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} v(T_1)(\mathbf{x}, t) (\mathbf{grad} \mathbf{u}_1)(\mathbf{x}, t) : (\mathbf{grad} \mathbf{u})(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ - \int_{\Omega} v(T_2)(\mathbf{x}, t) (\mathbf{grad} \mathbf{u}_2)(\mathbf{x}, t) : (\mathbf{grad} \mathbf{u})(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2)(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0$$

Or,

$$((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2, \mathbf{u}) = ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1, \mathbf{u}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nu(T_2)(\mathbf{x}, t) (\mathbf{grad} \mathbf{u})^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\Omega} (\nu(T_1) - \nu(T_2))(\mathbf{x}, t) (\mathbf{grad} \mathbf{u}_1)(\mathbf{x}, t) : (\mathbf{grad} \mathbf{u})(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ & \quad - \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1)(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on aura

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_1 \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & \leq c_1^\diamond c_2^\diamond \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \nu^\diamond c_3^\diamond \|\mathbf{u}_1(\cdot, t)\|_{W^{1,q}(\Omega)}^2 |T(\cdot, t)|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

où c_3^\diamond est la norme de l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{q^*}(\Omega)$, avec $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = \frac{1}{2}$.

En intégrant entre 0 et t, on déduit,

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega)^2)} \leq c \nu_1^{-1} (c_1^\diamond c_2^\diamond \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega)^2)} + \nu^\diamond c_3^\diamond \|\mathbf{u}_1\|_{L^2(0,t;W^{1,q}(\Omega)^2)} |T|_{L^2(0,t;H^1(\Omega))}),$$

d'après (3.3.18), on aura

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega)^2)} \leq c_1^\diamond c_2^\diamond \nu_1^{-1} (1 + \nu^\diamond c_3^\diamond \alpha^{-1} \|\mathbf{u}_1\|_{L^2(0,t;W^{1,q}(\Omega)^2)}) \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega)^2)},$$

En choisissant

$$c_\sharp^\diamond = c_2^\diamond \nu_1^{-1} \quad \text{et} \quad c_b^\diamond = c_1^\diamond c_2^\diamond \nu_1^{-1} c_3^\diamond \alpha^{-1},$$

tel que

$$c_1^\diamond c_2^\diamond \nu_1^{-1} (1 + \nu^\diamond c_3^\diamond \alpha^{-1} \|\mathbf{u}_1\|_{L^2(0,t;W^{1,q}(\Omega)^2)}) < 1.$$

Nous déduisons que \mathbf{u} est nul et d'après (3.3.18) on aura aussi que T est nul.

Finalement, comme \mathbf{u}_1 égale à \mathbf{u}_2 et T_1 égale à T_2 , la pression p vérifie alors

$$- \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2.$$

Et de la condition inf-sup nous déduisons qu'elle est nulle. Nous prouvons ainsi l'unicité de la solution (\mathbf{u}, p, T) .

Discrétisation spectrale des équations instationnaires

Ce chapitre est consacré à l'approximation numérique en espace par méthode spectrale des équations de Navier-Stokes couplées avec celle de la chaleur instationnaires. Ce chapitre est organisé en trois sections. La première section concerne la semi-discrétisation en temps, nous prouvons l'existence, l'unicité ($d = 2$) de la solution. Dans la deuxième section, nous étudions le problème discrétisé en espace à l'aide des méthodes spectrales. Et dans la troisième section, nous prouvons que le problème discret admet une solution localement unique et nous établissons ensuite des estimations a priori optimales entre la solution discrète et la solution approchée.

4.1 L'approximation temporelle

Pour discrétiser la dérivée temporelle de vitesse et de température, nous avons fait appel au schéma d'ordre un en temps, c'est un schéma d'Euler implicite [15, 17].

La dérivée $\partial_t u(t_k)$ est alors approchée par le quotient différentiel d'ordre τ_k ,

$$\partial_t u(t_k) \simeq \frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{\tau_k} + O(\tau_k). \quad (4.1.1)$$

Nous introduisons une partition de l'intervalle $[0, \tilde{T}]$ en des intervalles $[t_{k-1}, t_k], 0 \leq k \leq K$, tel que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = \tilde{T}$. Nous désignons par

$$\tau_k = t_k - t_{k-1},$$

le pas du temps. τ désigne le K -uplet (τ_1, \dots, τ_K) et

$$|\tau| = \max_{1 \leq k \leq K} \tau_k.$$

Nous sommes sur le point d'écrire la formulation variationnelle, pour toutes données

$$(f, g, T_b) \in \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d) \times \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)) \times \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$$

\mathbf{u}_0 dans $L^2(\Omega)^d$ vérifiant (3.3.1) et T_0 dans $L^2(\Omega)$. Et pour simplifier l'étude de notre problème, nous approchons le terme non linéaire par $\mathbf{v}(T^{j-1})$ et nous traitons les termes non linéaires $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ et $(\mathbf{u} \cdot \nabla)T$ de façon implicite. Nous considérons alors le schéma suivant :

Trouver $(\mathbf{u}^j)_{1 \leq j \leq J} \in (H_0^1(\Omega)^d)^J$, $(p^j)_{1 \leq j \leq J} \in (L_0^2(\Omega))^J$ et $(T^j)_{1 \leq j \leq J} \in (H^1(\Omega))^J$ tel que

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0 \quad \text{et} \quad T^0 = T_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.1.2)$$

tel que, pour tout j , $1 \leq j \leq J$,

$$T^j = T_b^j \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (4.1.3)$$

et tel que, pour tout j , $1 \leq j \leq J$,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad & (\mathbf{u}^j, \mathbf{v}) + \tau_j (\mathbf{v}(T^{j-1}) \nabla \mathbf{u}^j, \nabla \mathbf{v}) + \tau_j ((\mathbf{u}^j \cdot \nabla) \mathbf{u}^j, \mathbf{v}) \\ & - \tau_j (\operatorname{div} \mathbf{v}, p^j) = (\mathbf{u}^{j-1}, \mathbf{v}) + \tau_j \langle \mathbf{f}^j, \mathbf{v} \rangle_\Omega, \\ \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad & -(\operatorname{div} \mathbf{u}^j, q) = 0, \\ \forall S \in H_0^1(\Omega), \quad & (T^j, S) + \alpha \tau_j (\nabla T^j, \nabla S) + \tau_j ((\mathbf{u}^j \cdot \nabla) T^j, S) \\ & = (T^{j-1}, S) + \tau_j \langle g^j, S \rangle_\Omega, \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

où $\mathbf{f}^j = \mathbf{f}(\cdot, t_j)$, $g^j = g(\cdot, t_j)$ et $T_b^j = T_b(\cdot, t_j)$.

Remarque 4.1.1 Nous pouvons considérer ce schéma aussi

Trouver $(\mathbf{u}^j)_{1 \leq j \leq J} \in (H_0^1(\Omega)^d)^J$, $(p^j)_{1 \leq j \leq J} \in (L_0^2(\Omega))^J$ et $(T^j)_{1 \leq j \leq J} \in (H^1(\Omega))^J$ tel que

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0 \quad \text{et} \quad T^0 = T_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

tel que, pour tout j , $1 \leq j \leq J$,

$$T^j = T_b^j \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

et tel que, pour tout j , $1 \leq j \leq J$,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad & (\mathbf{u}^j, \mathbf{v}) + \tau_j (\mathbf{v}(T^{j-1}) \nabla \mathbf{u}^j, \nabla \mathbf{v}) - \tau_j (\operatorname{div} \mathbf{v}, p^j) \\ & = (\mathbf{u}^{j-1}, \mathbf{v}) + \tau_j \langle \mathbf{f}^j, \mathbf{v} \rangle_\Omega - \tau_j ((\mathbf{u}^{j-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{j-1}, \mathbf{v}), \\ \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad & -(\operatorname{div} \mathbf{u}^j, q) = 0, \\ \forall S \in H_0^1(\Omega), \quad & (T^j, S) + \alpha \tau_j (\nabla T^j, \nabla S) = (T^{j-1}, S) + \tau_j \langle g^j, S \rangle_\Omega - \tau_j ((\mathbf{u}^{j-1} \cdot \nabla) T^{j-1}, S). \end{aligned}$$

Oubien

Trouver $(\mathbf{u}^j)_{1 \leq j \leq J} \in (H_0^1(\Omega)^d)^J$, $(p^j)_{1 \leq j \leq J} \in (L_0^2(\Omega))^J$ et $(T^j)_{1 \leq j \leq J} \in (H^1(\Omega))^J$ tel que

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0 \quad \text{et} \quad T^0 = T_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

tel que, pour tout $j, 1 \leq j \leq J$,

$$T^j = T_b^j \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

et tel que, pour tout $j, 1 \leq j \leq J$,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad & (\mathbf{u}^j, \mathbf{v}) + \tau_j (\nu(T^{j-1}) \nabla \mathbf{u}^j, \nabla \mathbf{v}) + \tau_j ((\mathbf{u}^j \cdot \nabla) \mathbf{u}^{j-1}, \mathbf{v}) \\ & - \tau_j (\operatorname{div} \mathbf{v}, p^j) = (\mathbf{u}^{j-1}, \mathbf{v}) + \tau_j \langle \mathbf{f}^j, \mathbf{v} \rangle_\Omega, \\ \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad & -(\operatorname{div} \mathbf{u}^j, q) = 0, \\ \forall S \in H_0^1(\Omega), \quad & (T^j, S) + \alpha \tau_j (\nabla T^j, \nabla S) + \tau_j ((\mathbf{u}^j \cdot \nabla) T^{j-1}, S) \\ & = (T^{j-1}, S) + \tau_j \langle g^j, S \rangle_\Omega, \end{aligned}$$

Le premier schéma est stable sous la condition que le pas du temps soit suffisamment petit, cela vient du fait que les termes non linéaires des équations de Navier-Stokes et chaleur sont discrétisés de façon explicite.

Comme pour le cas continu, pour tout $j, 0 \leq j \leq J$, on pose $\overline{T}_b^j = \mathcal{R} T_b^j$, où \mathcal{R} est l'opérateur défini dans le chapitre 3, et on a

$$\|\overline{T}_b^j\|_{H^1(\Omega)} \leq c_\diamond \|T_b^j\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}, \quad (4.1.5)$$

avec la même constante c_\diamond que dans (3.3.5).

Alors, si (\mathbf{u}^j, p^j, T^j) est une solution du problème (4.1.2)–(4.1.3)–(4.1.4), le couple $(\mathbf{u}^j, T^{*j} = T^j - \overline{T}_b^j)_{0 \leq j \leq J}$ appartient à $V(\Omega)^{J+1} \times (H_0^1(\Omega))^{J+1}$, vérifie (4.1.2), et tel que, pour tout $1 \leq j \leq J$,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \quad & (\mathbf{u}^j, \mathbf{v}) + \tau_j (\nu(T^{*j-1} + \overline{T}_b^{j-1}) \nabla \mathbf{u}^j, \nabla \mathbf{v}) + \tau_j ((\mathbf{u}^j \cdot \nabla) \mathbf{u}^j, \mathbf{v}) \\ & = (\mathbf{u}^{j-1}, \mathbf{v}) + \tau_j \langle \mathbf{f}^j, \mathbf{v} \rangle_\Omega, \\ \forall S \in H_0^1(\Omega), \quad & (T^{*j}, S) + \alpha \tau_j (\nabla T^{*j}, \nabla S) + \tau_j ((\mathbf{u}^j \cdot \nabla) T^{*j}, S) \\ & = (T^{*j-1}, S) + \tau_j \langle g^j, S \rangle_\Omega - (\overline{T}_b^j, S) + (\overline{T}_b^{j-1}, S) \\ & \quad - \alpha \tau_j (\nabla \overline{T}_b^j, \nabla S) - \tau_j ((\mathbf{u}^j \cdot \nabla) \overline{T}_b^j, S). \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

4.1.1 Existence et unicité de la solution

Comme pour le cas continu, nous démontrons un résultat d'existence sur la solution (\mathbf{u}^j, p^j, T^j) afin de prouver l'équivalence entre les problèmes (4.1.2)–(4.1.3)–(4.1.4) et (4.1.2)–(4.1.6). Par les mêmes arguments du théorème 3.3.1, on prouve l'existence de la solution $(\mathbf{u}^j, T^j = T^{*j} + \overline{T}_b^j)$.

Proposition 4.1.1

Si $(\mathbf{u}^j, T^{*j})_{0 \leq j \leq J}$ est une solution du problème (4.1.2)–(4.1.6), alors il existe un p^j de $L_0^2(\Omega)$ tel que $(\mathbf{u}^j, p^j, T^j = T^{*j} + \overline{T}_b^j)$ est une solution du problème (4.1.2)–(4.1.3)–(4.1.4).

Démonstration. Nous définissons la fonctionnelle suivante, pour tout \mathbf{v} dans $H_0^1(\Omega)^d$

$$L_j(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}^j, \mathbf{v} \rangle_\Omega - (\mathbf{v}(\mathbf{T}^{*j-1} + \overline{\mathbf{T}}_b^{j-1}) \nabla \mathbf{u}^j, \nabla \mathbf{v}) - ((\mathbf{u}^j \cdot \nabla) \mathbf{u}^j, \mathbf{v}) - \frac{1}{\tau_j} (\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1}, \mathbf{v})$$

L'application $\mathbf{v} \mapsto L_j(\mathbf{v})$ est une fonctionnelle linéaire continue dans $H^1(\Omega)^d$, et d'après (4.1.6) elle s'annule sur $V(\Omega)$. Grâce à la condition inf-sup (1.2.5) et d'après Girault et Raviart [24, Chap. I, Lemme 2.1], il existe un \mathbf{p}^j de $L_0^2(\Omega)$ tel que :

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad L_j(\mathbf{v}) = -(\operatorname{div} \mathbf{v}, \mathbf{p}^j), \quad (4.1.7)$$

$$\|\mathbf{p}^j\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d} \frac{L_j(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d}}. \quad (4.1.8)$$

Par conséquent, $(\mathbf{u}^j, \mathbf{p}^j, \mathbf{T}^j = \mathbf{T}^{*j} + \overline{\mathbf{T}}_b^j)$ est une solution du problème (4.1.2)–(4.1.3)–(4.1.4), équivalent au problème (4.1.2)–(4.1.6), pour les mêmes arguments que ceux du problème continu.

La démonstration de cette proposition se repose sur les mêmes arguments du théorème 3.3.3.

Proposition 4.1.2

On suppose que la fonction \mathbf{v} est lipschitzienne et on désigne par \mathbf{v}^\diamond la constante de Lipschitz. Il existe deux constante positive $c_\#^\diamond$ et c_b^\diamond telles que

(i) si les données $(\mathbf{f}^j, \mathbf{g}^j, \mathbf{T}_b^j) \in H^{-1}(\Omega)^2 \times H^{-1}(\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)^2$, $\mathbf{T}_0 \in L^2(\Omega)$ et $\mathbf{T}_b^0 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ vérifient

$$c_\#^\diamond (\|\mathbf{T}_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{T}_b^0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|\mathbf{f}^j\|_{H^{-1}(\Omega)^2}^2 + \|\mathbf{T}_b^j\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 + \|\mathbf{g}^j\|_{H^{-1}(\Omega)}) < 1, \quad (4.1.9)$$

(ii) si la solution $(\mathbf{u}^j, \mathbf{p}^j, \mathbf{T}^j)$ du problème (4.1.2)–(4.1.3)–(4.1.4) est telle que \mathbf{u}^j dans $W^{1,q}(\Omega)^2$ avec $q > 2$ et satisfaisant

$$c_b^\diamond \mathbf{v}^\diamond \|\mathbf{u}^j\|_{W^{1,q}(\Omega)^2} < 1, \quad (4.1.10)$$

Alors, cette solution est unique.

Théorème 4.1.1

Supposons que la donnée \mathbf{f} appartient à $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}, H^{-1}(\Omega)^d)$ et la vitesse initiale \mathbf{u}_0 appartient à $L^2(\Omega)^d$ et satisfait (3.3.1). La suite des vitesses $(\mathbf{u}^j)_{1 \leq j \leq J}$ satisfait, pour $j \geq 1$:

$$\|\mathbf{u}^j\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \|\mathbf{u}^0\|_{L^2(\Omega)^d} + \sqrt{\frac{1}{c\nu_1}} \left(\sum_{m=1}^j \tau_m \|\mathbf{f}^m\|_{H^{-1}(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.1.11)$$

Démonstration. Afin d'établir (4.1.11), nous prenons \mathbf{v} égal à \mathbf{u}^j dans (4.1.4), on aura

$$(\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1}, \mathbf{u}^j) + \tau_j (\mathbf{v}(\mathbf{T}^{j-1}) \nabla \mathbf{u}^j, \nabla \mathbf{u}^j) = \tau_j \langle \mathbf{f}^j, \mathbf{u}^j \rangle_\Omega,$$

et nous utilisons cette relation

$$a(a-b) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2 - \frac{1}{2}b^2$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \|\mathbf{u}^{j-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2) + c\nu_1\tau_j\|\mathbf{u}^j\|_{H^1(\Omega)^d}^2 \\ \leq \tau_j\|\mathbf{f}^j\|_{H^{-1}(\Omega)^d}\|\mathbf{u}^j\|_{H^1(\Omega)^d}, \end{aligned}$$

ainsi, en utilisant l'inégalité de Young

$$\|\mathbf{u}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \|\mathbf{u}^{j-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + c\nu_1\tau_j\|\mathbf{u}^j\|_{H^1(\Omega)^d}^2 \leq \frac{\tau_j}{c\nu_1}\|\mathbf{f}^j\|_{H^{-1}(\Omega)^d}^2,$$

ensuite, en sommant sur j , nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{m=1}^j \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + c\nu_1 \sum_{m=1}^j \tau_m \|\mathbf{u}^m\|_{H^1(\Omega)^d}^2 \\ \leq \|\mathbf{u}^0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{c\nu_1} \sum_{m=1}^j \tau_m \|\mathbf{f}^m\|_{H^{-1}(\Omega)^d}^2, \end{aligned}$$

On en déduit,

$$\|\mathbf{u}^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \|\mathbf{u}^0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{c\nu_1} \sum_{m=1}^j \tau_m \|\mathbf{f}^m\|_{H^{-1}(\Omega)^d}^2.$$

4.2 Approximation spatiale

Les équations (3.1.1–3.1.2–3.1.3–3.1.4–3.1.5) sont résolues à partir de leur formulation variationnelle. Dans le problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4), les variables d'espaces et de temps jouent des rôles différents, ce qui motive une approche par discrétisation à l'aide des méthodes spectrales en espace.

Dans ce chapitre nous conservons les notations du Chapitre 2. Supposons que la donnée T_b est continue sur $\partial\bar{\Omega} \times [0, T]$, les données \mathbf{f} et \mathbf{g} continuent sur $\bar{\Omega} \times [0, T]$, la température initiale dans $L^2(\Omega)$ et la donnée initiale \mathbf{u}_0 dans $L^2(\Omega)^d$ satisfait (3.3.1) et T_0 dans $L^2(\Omega)$. Le problème discret est construit à partir du problème (4.1.2)–(4.1.3)–(4.1.4) par la méthode de Galerkin avec intégration numérique. Il s'écrit alors sous la forme

Trouver $(\mathbf{u}_N^j)_{1 \leq j \leq J} \in (\mathbb{X}_N)^J$, $(p_N^j)_{1 \leq j \leq J} \in (\mathbb{M}_N)^J$ et $(T_N^j)_{1 \leq j \leq J} \in (\mathbb{Y}_N)^J$ tel que

$$\mathbf{u}_N^0 = I_N \mathbf{u}_0 \quad \text{et} \quad T_N^0 = I_N T_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.2.1)$$

tel que, pour tout j , $1 \leq j \leq J$,

$$T_N^j = i_N^{\partial\Omega} T_b^j \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (4.2.2)$$

et pour tout j , $1 \leq j \leq J$,

$$\begin{aligned}
\forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, \quad & (\mathbf{u}_N^j, \mathbf{v}_N)_N + \tau_j (\nu(T_N^{j-1}) \mathbf{grad} \mathbf{u}_N^j, \mathbf{grad} \mathbf{v}_N)_N + \tau_j ((\mathbf{u}_N^j \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^j, \mathbf{v}_N)_N \\
& - \tau_j (\operatorname{div} \mathbf{v}_N, p_N^j)_N = (\mathbf{u}_N^{j-1}, \mathbf{v}_N)_N + \tau_j (\mathbf{f}^j, \mathbf{v}_N)_N, \\
\forall q_N \in \mathbb{M}_N, \quad & -(\operatorname{div} \mathbf{u}_N^j, q_N)_N = 0, \\
\forall S_N \in \mathbb{Y}_N^0, \quad & (T_N^j, S_N)_N + \alpha \tau_j (\mathbf{grad} T_N^j, \mathbf{grad} S_N)_N + \tau_j ((\mathbf{u}_N^j \cdot \nabla) T_N^j, S_N)_N \\
& = (T_N^{j-1}, S_N)_N + \tau_j (g^j, S_N)_N.
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

L'existence et l'unicité de la pression du problème discret (4.2.1)–(4.2.2)–(4.2.3) étant assurée par la condition inf-sup (2.6.11), l'existence d'une solution $(\mathbf{u}_N^j, T_N^j)_{1 \leq j \leq J}$ de ce même problème peut être obtenue par les mêmes arguments que dans le cas continu, mais nous préférons suivre l'approche de Brezzi, Rappaz et Raviart [13] pour obtenir directement des résultats plus précis.

Par les mêmes arguments que dans le théorème 4.1.1, la suite $(\mathbf{u}_N^j)_{1 \leq j \leq J}$ vérifie l'estimation suivante, donnée dans le théorème ci-dessous.

Théorème 4.2.1

Supposons que la donnée \mathbf{f} est continue sur $\overline{\Omega} \times [0, T]$ et la donnée initiale \mathbf{u}_0 appartient à $L^2(\Omega)^d$ satisfait (3.3.1). Alors, la solution du problème (4.2.1)–(4.2.2)–(4.2.3) vérifie

$$\|\mathbf{u}_N^j\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \|\mathbf{u}_N^0\|_{L^2(\Omega)^d} + \sqrt{\frac{1}{c\nu_1}} \left(\sum_{m=1}^j \tau_m \|I_N \mathbf{f}^m\|_{H^{-1}(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2.4}$$

4.3 Estimation a priori

Afin d'appliquer le théorème de Brezzi, Rappaz et Raviart [13], nous devons écrire une autre formulation du problème continu. Pour cela, on introduit l'opérateur de Stokes $\mathcal{S}^*(\theta)$, qui associe pour toute donnée \mathbf{F} dans $L^2(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d)$ et \mathbf{u}_0 dans $L^2(\Omega)^d$ la partie \mathbf{u} de la solution (\mathbf{u}, p) de ce problème de Stokes

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in L^2(0, \tilde{T}; H_0^1(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; L_0^2(\Omega))$ tel que

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, \tilde{T}[\quad \text{et} \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{4.3.1}$$

tel que, pour tout t , $0 \leq t \leq \tilde{T}$,

$$\begin{aligned}
\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad & \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nu(\theta) \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
& + \int_{\Omega} (\mathbf{grad} p)(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle \mathbf{F}(\cdot, t), \mathbf{v} \rangle_{\Omega}, \\
\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad & - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

On considère aussi l'opérateur $\widetilde{\mathcal{S}}^*(\theta)$ qui associe à toute donnée \mathbf{F} dans $L^2(0, \widetilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d)$ et \mathbf{u}_0 dans $L^2(\Omega)^d$ la partie \mathbf{p} de la solution (\mathbf{u}, \mathbf{p}) de ce même problème.

On introduit l'opérateur inverse de Laplace \mathcal{L}^* qui associe pour toutes données

$$(G, T_b, T_0) \in L^2(0, \widetilde{T}; H^{-1}(\Omega)) \times L^2(0, \widetilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)) \times L^2(\Omega)$$

la solution T du problème

Trouver $T \in L^2(0, \widetilde{T}; H^1(\Omega))$ tel que

$$T = T_b \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, \widetilde{T}[\quad \text{et} \quad T|_{t=0} = T_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.3.3)$$

tel que, pour tout t , $0 \leq t \leq \widetilde{T}$,

$$\forall S \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \partial_t T(\mathbf{x}, t) S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle G(\cdot, t), S \rangle_{\Omega} \quad (4.3.4)$$

En notant $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ T \end{pmatrix}$, le problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4) devient équivalent au problème suivant :

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{U} - \begin{pmatrix} \mathcal{S}^*(T) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}^* \end{pmatrix} G(\mathbf{U}) = 0, \quad (4.3.5)$$

avec

$$G(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} (\mathcal{G}_1(\mathbf{U}), \mathbf{u}_0) \\ (\mathcal{G}_2(\mathbf{U}), T_b, T_0) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1(\mathbf{U}) \\ \mathcal{G}_2(\mathbf{U}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ g - (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \end{pmatrix}. \quad (4.3.6)$$

4.3.1 À propos de la discrétisation en temps

À partir de maintenant, on note par \mathbf{u}_τ la fonction affine sur chaque intervalle $[t_{j-1}, t_j]$ et égale à \mathbf{u}^j à chaque instant t_j , $0 \leq j \leq J$, et par p_τ, T_τ les fonctions affines égaux à p^j, T^j respectivement sur chaque intervalle $]t_{j-1}, t_j]$, $1 \leq j \leq J$.

Pour chaque fonction \mathbf{v} continue sur $[0, \widetilde{T}]$, on introduit :

- la fonction $\pi_\tau^+ \mathbf{v}$ constante et égale à $\mathbf{v}(t_j)$ sur chaque intervalle $]t_{j-1}, t_j]$, $1 \leq j \leq J$.
- la fonction $\pi_\tau^- \mathbf{v}$ constante et égale à $\mathbf{v}(t_{j-1})$ sur chaque intervalle $]t_{j-1}, t_j]$, $1 \leq j \leq J$.

Soit $\mathcal{S}_\tau^*(\theta)$ l'opérateur semi-discret suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\tau^*(\theta) : \quad & \mathcal{C}^0(0, \widetilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d) \times L^2(\Omega)^d \longrightarrow H_0^1(\Omega)^d \\ & (\mathbf{F}, \mathbf{u}_0) \longmapsto \mathbf{u}_\tau \end{aligned}$$

où \mathbf{u}_τ est choisi comme la fonction associée à la solution \mathbf{u}^j telle que (\mathbf{u}^j, p^j) soit solution du problème de Stokes suivant

Trouver $(\mathbf{u}^j)_{1 \leq j \leq J} \in (H_0^1(\Omega)^d)^J$ et $(p^j)_{1 \leq j \leq J} \in (L_0^2(\Omega))^J$ tel que

$$\mathbf{u}^j = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad 1 \leq j \leq J \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.3.7)$$

et, pour tout $j, 1 \leq j \leq J$,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1}}{\tau_j} \right) (\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nu(\theta) \nabla \mathbf{u}^j(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} (\mathbf{grad} p^j)(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle \mathbf{F}(\cdot, t_j), \mathbf{v} \rangle_{\Omega}, \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} -(\operatorname{div} \mathbf{u}^j)(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

On considère aussi l'opérateur $\widetilde{\mathcal{S}}_{\tau}^*(\theta)$ qui associ pour toute donnée \mathbf{F} dans $\mathcal{C}^0(0, \widetilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d)$ et \mathbf{u}_0 dans $L^2(\Omega)^d$ la partie p_{τ} associée à la solution p^j telle que (\mathbf{u}^j, p^j) est solution de ce même problème.

Soit finalement \mathcal{L}_{τ}^* l'opérateur semi-discret, pour toute donnée

$$(G, T_b, T_0) \in \mathcal{C}^0(0, \widetilde{T}; H^{-1}(\Omega)) \times \mathcal{C}^0(0, \widetilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)) \times L^2(\Omega),$$

$\mathcal{L}_{\tau}^*(G, T_b, T_0)$ est égal à la fonction T_{τ} associé à la solution T^j solutions de

Trouver $(T^j)_{1 \leq j \leq J} \in (H^1(\Omega))^J$ tel que

$$T^j = T_b^j \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad 1 \leq j \leq J \quad \text{et} \quad T^0 = T_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.3.9)$$

et pour tout $j, 1 \leq j \leq J$,

$$\forall S \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \left(\frac{T^j - T^{j-1}}{\tau_j} \right) (\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla T^j(\mathbf{x}) \cdot \nabla S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle G(\cdot, t_j), S \rangle_{\Omega} \quad (4.3.10)$$

Ainsi, le problème (4.1.2)–(4.1.3)–(4.1.4) peut être écrit d'une manière équivalente comme suit :

$$\mathcal{F}_{\tau}(\mathbf{U}_{\tau}) = \mathbf{U}_{\tau} - \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{\tau}^*(\pi_{\tau}^{-} T_{\tau}) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{\tau}^* \end{pmatrix} G(\mathbf{U}_{\tau}) = 0, \quad (4.3.11)$$

où G est défini en (4.3.6).

Nous allons maintenant montrer une estimation d'erreur entre la solution (\mathbf{u}, p) du problème (4.3.1)–(4.3.2) et la solution (\mathbf{u}^j, p^j) du problème (4.3.7)–(4.3.8).

Proposition 4.3.1

On suppose que la vitesse \mathbf{u} de la solution (\mathbf{u}, p) du problème (4.3.1)–(4.3.2) appartient à l'espace $H^2(0, \widetilde{T}; H^1(\Omega)^d)$. Alors, on a la majoration d'erreur $1 \leq j \leq J$,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t_j) - \mathbf{u}^j\|_{H^1(\Omega)^d} \leq \frac{1}{\sqrt{3c\nu_1}} |\tau| \|\mathbf{u}\|_{H^2(0, \widetilde{T}; H^1(\Omega)^d)}. \quad (4.3.12)$$

$$\left(\sum_{m=1}^j \tau_m \left\| \frac{(\mathbf{u}(\cdot, t_m) - \mathbf{u}^m) - (\mathbf{u}(\cdot, t_{m-1}) - \mathbf{u}^{m-1})}{\tau_m} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{|\tau|}{\sqrt{3c\nu_1}} \|\mathbf{u}\|_{H^2(0, t_j; H^1(\Omega)^d)}, \quad (4.3.13)$$

$$\left(\sum_{m=1}^j \tau_m \|\mathbf{p}(\cdot, t_m) - \mathbf{p}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{3c\nu_1}} |\tau| \|\mathbf{u}\|_{H^2(0, t_j; H^1(\Omega)^d)}. \quad (4.3.14)$$

Démonstration. 1) Dans une première étape, on soustrait l'équation (4.3.8) de (4.3.2) à l'instant t_j . Ainsi, la suite $(\mathbf{e}_u^j)_{0 \leq j \leq J}$, définie par $\mathbf{e}_u^j = \mathbf{u}(\cdot, t_j) - \mathbf{u}^j$ satisfait $\mathbf{e}_u^0 = \mathbf{0}$ et pour tout $1 \leq j \leq J$,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad (\mathbf{e}_u^j, \mathbf{v}) + \tau_j (\nu(\theta) \nabla \mathbf{e}_u^j, \nabla \mathbf{v}) - \tau_j (\operatorname{div} \mathbf{v}, \mathbf{p}(\cdot, t_j) - \mathbf{p}^j) &= (\mathbf{e}_u^{j-1}, \mathbf{v}) + \tau_j \langle \boldsymbol{\varepsilon}_u^j, \mathbf{v} \rangle_\Omega, \\ \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \int_\Omega -(\operatorname{div} \mathbf{e}_u^j)(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_u^m$ est donnée par

$$\boldsymbol{\varepsilon}_u^j = \frac{\mathbf{u}(\cdot, t_j) - \mathbf{u}(\cdot, t_{j-1})}{\tau_j} - (\partial_t \mathbf{u})(\cdot, t_j). \quad (4.3.16)$$

En appliquant les mêmes arguments de (4.1.11) au problème (4.3.15), on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_u^j\|_{H^1(\Omega)^d}^2 &\leq \frac{1}{c\nu_1} \sum_{m=1}^j \tau_m \|\boldsymbol{\varepsilon}_u^m\|_{H^{-1}(\Omega)^d}^2, \\ &\leq \frac{1}{c\nu_1} \sum_{m=1}^j \tau_m \|\boldsymbol{\varepsilon}_u^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Pour estimer $\boldsymbol{\varepsilon}_u^m$, on fait appel à la formule de Taylor

$$\mathbf{u}(\cdot, t_{j-1}) = \mathbf{u}(\cdot, t_j) + (t_{j-1} - t_j)(\partial_t \mathbf{u})(\cdot, t_j) - \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_{j-1})(\partial_{tt}^2 \mathbf{u})(\cdot, t) dt,$$

donc

$$\frac{\mathbf{u}(\cdot, t_j) - \mathbf{u}(\cdot, t_{j-1})}{\tau_j} - (\partial_t \mathbf{u})(\cdot, t_j) = -\frac{1}{\tau_j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_{j-1})(\partial_{tt}^2 \mathbf{u})(\cdot, t) dt.$$

On déduit que,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_u^j = -\frac{1}{\tau_j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_{j-1})(\partial_{tt}^2 \mathbf{u})(\cdot, t) dt.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}_u^j\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{1}{\tau_j} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_{j-1})^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|_{H^2(t_{j-1}, t_j; H^1(\Omega)^d)}$$

Or,

$$\begin{aligned}
 \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_{j-1})^2 dt &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} t^2 dt - 2 t_{j-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} t dt + t_{j-1}^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \\
 &= \frac{1}{3} t_j^3 - \frac{1}{3} t_{j-1}^3 - t_{j-1} t_j^2 + t_{j-1}^2 t_j - t_{j-1}^3 \\
 &= \frac{1}{3} t_j^3 - \frac{1}{3} t_{j-1}^3 - t_{j-1} t_j^2 + t_{j-1}^2 t_j \\
 &= \frac{1}{3} (t_j - t_{j-1})^3 \\
 &= \frac{1}{3} \tau_j^3.
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \|\epsilon_u^j\|_{L^2(\Omega)^d} &\leq \frac{1}{\tau_j} \frac{\tau_j^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} \|\mathbf{u}\|_{H^2(t_{j-1}, t_j; H^1(\Omega)^d)}, \\
 &\leq \frac{\tau_j^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \|\mathbf{u}\|_{H^2(t_{j-1}, t_j; H^1(\Omega)^d)}, \\
 \|\epsilon_u^j\|_{L^2(\Omega)^d}^2 &\leq \frac{\tau_j}{3} \|\mathbf{u}\|_{H^2(0, t_j; H^1(\Omega)^d)}^2.
 \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{e}_u^j\|_{H^1(\Omega)^d}^2 &\leq \left(\frac{1}{c\nu_1} \right) \frac{|\tau|^2}{3} \|\mathbf{u}\|_{H^2(0, t_j; H^1(\Omega)^d)}^2, \\
 \|\mathbf{e}_u^j\|_{H^1(\Omega)^d} &\leq \left(\frac{1}{c\nu_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} |\tau| \|\mathbf{u}\|_{H^2(0, t_j; H^1(\Omega)^d)},
 \end{aligned}$$

Par suite,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t_j) - \mathbf{u}^j\|_{H^1(\Omega)^d} \leq \left(\frac{1}{c\nu_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} |\tau| \|\mathbf{u}\|_{H^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)^d)}.$$

2) Dans une deuxième étape, on choisit \mathbf{v} égal à $\mathbf{e}_u^j - \mathbf{e}_u^{j-1}$ dans (4.3.15) en notant que \mathbf{e}_u^0 égal à zéro et $(\operatorname{div} \mathbf{v}, p(\cdot, t_j) - p^j)$ s'annule sur Ω , ceci donne

$$\sum_{m=1}^j \tau_m \left\| \frac{(\mathbf{u}(\cdot, t_m) - \mathbf{u}^m) - (\mathbf{u}(\cdot, t_{m-1}) - \mathbf{u}^{m-1})}{\tau_m} \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \frac{1}{\nu_1} \sum_{m=1}^j \tau_m \|\epsilon_u^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2, \tag{4.3.19}$$

en utilisant (4.3.18) on aboutit à (4.3.13).

3) Dans une dernière étape, on démontre (4.3.14) on déduit de l'équation (4.3.15) que

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad -(\operatorname{div} \mathbf{v}, p(\cdot, t_j) - p^j) = -\left(\frac{\mathbf{e}_u^{j-1} - \mathbf{e}_u^j}{\tau_j}, \mathbf{v} \right) - (\nu(\theta) \nabla \mathbf{e}_u^j, \nabla \mathbf{v}) + \langle \epsilon_u^j, \mathbf{v} \rangle_{\Omega}.$$

En utilisant la condition inf-sup (1.2.5). on obtient

$$\|p(\cdot, t_j) - p^j\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{\mathbf{e}_u^{j-1} - \mathbf{e}_u^j}{\tau_j} \right\|_{L^2(\Omega)^d} + c\nu_2 \|\mathbf{e}_u^j\|_{H^1(\Omega)^d} + \|\epsilon_u^j\|_{L^2(\Omega)^d},$$

en multipliant par τ_j , en sommant sur j , $0 \leq j \leq J$ avec (4.3.19) et (4.3.18), on obtient le résultat désiré.

Proposition 4.3.2

On suppose que la température T du problème (4.3.3)–(4.3.4) appartient à l'espace $H^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$. Alors, on a la majoration d'erreur, $1 \leq j \leq J$,

$$\|T(., t_j) - T^j\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{|\tau|}{\sqrt{3c}} \|T\|_{H^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))}. \quad (4.3.20)$$

Démonstration. On soustrait l'équation (4.3.10) de (4.3.4) à l'instant t_j . Ainsi, la suite définie par $e_T^j = T(., t_j) - T^j$ satisfait $e_T^0 = 0$ et pour tout $1 \leq j \leq J$,

$$\forall S \in H_0^1(\Omega), \quad (e_T^j - e_T^{j-1}, S) + \alpha \tau_j (\nabla e_T^j, \nabla S) = \tau_j \langle \varepsilon_T^j, S \rangle_\Omega, \quad (4.3.21)$$

avec ε_T^j est donné par

$$\varepsilon_T^j = \frac{T(., t_j) - T(., t_{j-1})}{\tau_j} - (\partial_t T)(., t_j). \quad (4.3.22)$$

Ainsi, en prenant S égal à e_T^j dans (4.3.21), on obtient

$$\frac{1}{2} (\|e_T^j\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e_T^{j-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_T^j - e_T^{j-1}\|_{L^2(\Omega)}^2) + \alpha c \tau_j \|e_T^j\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \tau_j \|\varepsilon_T^j\|_{H^{-1}(\Omega)} \|e_T^j\|_{H^1(\Omega)},$$

$$\|e_T^j\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(\frac{1}{c} \sum_{m=1}^j \tau_m \|\varepsilon_T^m\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après (4.3.18), on obtient

$$\|T(., t_j) - T^j\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(\frac{1}{3c} \right)^{\frac{1}{2}} |\tau| \|T\|_{H^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))}.$$

Il résulte alors les propriétés suivantes sur les opérateurs semi-discret \mathcal{S}_τ^* et \mathcal{L}_τ^* .

Lemme 4.3.1

(i) Stabilité : Pour toute donnée F dans $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d)$,

$$\|\mathcal{S}_\tau^*(\theta)(F, 0)\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)^d)} \leq c \|\pi_\tau^+ F\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d)}, \quad (4.3.23)$$

et pour toute donnée G dans $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega))$,

$$\|\mathcal{L}_\tau^*(G, 0, 0)\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} \leq c \|\pi_\tau^+ G\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega))}. \quad (4.3.24)$$

(ii) L'estimation a priori : Si de plus $\mathcal{S}^*(\theta)(F, u_0)$ est dans $H^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)^d)$,

$$\|(\mathcal{S}^* - \mathcal{S}_\tau^*)(\theta)(F, u_0)\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)^d)} \leq c |\tau| \|\mathcal{S}^*(\theta)(F, u_0)\|_{H^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)^d)}. \quad (4.3.25)$$

et si $\mathcal{L}^*(G, T_b, T_0)$ appartient à $H^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$,

$$\|(\mathcal{L}^* - \mathcal{L}_\tau^*)(G, T_b, T_0)\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} \leq c |\tau| \|\mathcal{L}^*(G, T_b, T_0)\|_{H^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))}. \quad (4.3.26)$$

On note que ces propriétés donne le résultat de convergence suivant,

Corollaire 4.3.1

Pour tout F dans $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d)$ et G dans $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega))$

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \|(\mathcal{S}^* - \mathcal{S}_\tau^*)(\theta)(F, 0)\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)^d)} = 0, \quad (4.3.27)$$

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \|(\mathcal{L}^* - \mathcal{L}_\tau^*)(G, 0, 0)\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} = 0. \quad (4.3.28)$$

4.3.2 À propos de la discrétisation en espace

Similairement, on note par $\mathbf{u}_{N\tau}$ la fonction affine sur chaque intervalle $[t_{j-1}, t_j]$ et égal à \mathbf{u}_N^j à chaque instant t_j , $0 \leq j \leq J$, et aussi par $p_{N\tau}, T_{N\tau}$ les fonctions affines égal à p_N^j, T_N^j respectivement sur chaque intervalle $]t_{j-1}, t_j]$, $1 \leq j \leq J$. On définit aussi $\mathcal{S}_{N\tau}^*(\theta)$ l'opérateur de Stokes discret, i.e., l'opérateur qui associe pour toute donnée F dans $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d)$ et \mathbf{u}_0 dans $L^2(\Omega)^d$, la partie $\mathbf{u}_{N\tau}$ associé à la solution (\mathbf{u}_N^j, p_N^j) de ce problème

Trouver $(\mathbf{u}_N^j)_{1 \leq j \leq J} \in (\mathbb{X}_N)^J$ et $(p_N^j)_{1 \leq j \leq J} \in (\mathbb{M}_N)^J$ tel que

$$\mathbf{u}_N^j = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega, \quad 1 \leq j \leq J \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_N^0 = I_N \mathbf{u}_0 \text{ dans } \Omega, \quad (4.3.29)$$

et, pour $1 \leq j \leq J$,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, \quad & \left(\frac{\mathbf{u}_N^j - \mathbf{u}_N^{j-1}}{\tau_j}, \mathbf{v}_N \right)_N + \left(\nu(\theta) \nabla \mathbf{u}_N^j, \nabla \mathbf{v}_N \right)_N - \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_N, p_N^j \right)_N = \langle F(\cdot, t_j), \mathbf{v}_N \rangle_\Omega, \\ \forall q_N \in \mathbb{M}_N, \quad & - \left(\operatorname{div} \mathbf{u}_N^j, q_N \right)_N = 0. \end{aligned}$$

On introduit finalement l'opérateur $\mathcal{L}_{N\tau}^*$ qui associe pour toute données

$$(G, T_b, T_0) \in \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)) \times \mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)) \times L^2(\Omega),$$

la partie $T_{N\tau}$ associé à la solution T_N^j de ce problème

$$T_N^j = i_N^{\partial\Omega} T_b^j \text{ sur } \partial\Omega, \quad 1 \leq j \leq J \quad \text{et} \quad T_N^0 = I_N T_0 \text{ dans } \Omega, \quad (4.3.30)$$

$$\forall S_N \in \mathbb{Y}_N^0, \quad \left(\frac{T_N^j - T_N^{j-1}}{\tau_j}, S_N \right)_N + \alpha \left(\mathbf{grad} T_N^j, \mathbf{grad} S_N \right)_N = \langle G(\cdot, t_j), S_N \rangle_\Omega. \quad (4.3.31)$$

En notant $\mathbf{U}_{N\tau} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{N\tau} \\ T_{N\tau} \end{pmatrix}$, le problème (4.2.2)–(4.2.3) peut être écrit d'une manière équivalente comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{N\tau}(\mathbf{U}_{N\tau}) &= \mathbf{U}_{N\tau} - \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- T_{N\tau}) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{N\tau}^* \end{pmatrix} \mathcal{G}_{N\tau}(\mathbf{U}_{N\tau}) = 0, \\ \text{avec} \quad \mathcal{G}_{N\tau}(\mathbf{U}_{N\tau}) &= \begin{pmatrix} (\mathcal{G}_{N\tau 1}, \mathbf{u}_0) \\ (\mathcal{G}_{N\tau 2}, T_b, T_0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

Les deux compantes $\mathcal{G}_{N\tau 1}$ et $\mathcal{G}_{N\tau 2}$ sont définies respectivement par

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, \quad \int_{\Omega} \mathcal{G}_{N\tau 1}(\mathbf{x}, \cdot) \cdot \mathbf{v}_N(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= (\mathbf{f} - (\mathbf{u}_{N\tau} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N\tau}, \mathbf{v}_N)_N \\ \forall S_N \in \mathbb{Y}_N^0, \quad \int_{\Omega} \mathcal{G}_{N\tau 2}(\mathbf{x}, \cdot) \cdot S_N(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= (g - (\mathbf{u}_{N\tau} \cdot \nabla) T_{N\tau}, S_N)_N \end{aligned}$$

Il résulte de même les propriétés suivantes, pour la preuve de (ii) nous utilisons les mêmes techniques que dans les théorèmes 2.6.1 et 2.6.2, Chapitre 2 sur l'opérateur semi-discret $\mathcal{S}_{N\tau}^*$ et $\mathcal{L}_{N\tau}^*$.

Lemme 4.3.2

(i) Stabilité : Pour toute donnée \mathbf{F} dans $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d)$,

$$\|\mathcal{S}_{N\tau}^*(\theta)(\mathbf{F}, 0)\|_{H^1(\Omega)^d} \leq c \sum_{m=1}^j \tau_m \sup_{\mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t_m) \mathbf{v}_N(\mathbf{x}, t_m) d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}}, \quad (4.3.33)$$

et pour toute donnée G dans $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega))$,

$$\|\mathcal{L}_{N\tau}^*(G, 0, 0)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c \sum_{m=1}^j \tau_m \sup_{S_N \in \mathbb{Y}_N^0} \frac{\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, t_m) S_N(\mathbf{x}, t_m) d\mathbf{x}}{\|S_N\|_{H^1(\Omega)}}. \quad (4.3.34)$$

(ii) Estimation a priori : Si de plus $\widetilde{\mathcal{S}}_{\tau}^*(\theta)(\mathbf{F}, \mathbf{u}_0)$ est dans $L^2(0, \tilde{T}; H^{s-1}(\Omega))$ et $\mathcal{S}_{\tau}^*(\theta)(\mathbf{F}, \mathbf{u}_0)$ est dans $L^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega)^d)$ pour $s, s \geq 1$,

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{S}_{\tau}^* - \mathcal{S}_{N\tau}^*)(\theta)(\mathbf{F}, \mathbf{u}_0)\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)^d)} &\leq c N^{1-s} (\|\mathcal{S}_{\tau}^*(\theta)(\mathbf{F}, \mathbf{u}_0)\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega)^d)} \\ &\quad + \|\widetilde{\mathcal{S}}_{\tau}^*(\theta)\mathbf{F}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{s-1}(\Omega))}). \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

et si de plus $\mathcal{L}_{\tau}^* G$ appartient à $L^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega))$, $s \geq 1$ et T_b à $L^2(0, \tilde{T}; H^{\sigma}(\partial\Omega))$, pour σ , $\sigma > \frac{d-1}{2}$,

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{L}_{\tau}^* - \mathcal{L}_{N\tau}^*)(G, T_b, T_0)\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} \\ \leq c (N^{1-s} \|\mathcal{L}_{\tau}^*(G, T_b, T_0)\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega))} + N^{\frac{1}{2}-\sigma} \|T_b\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{\sigma}(\partial\Omega))}). \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

On déduit un résultat sur la convergence

Corollaire 4.3.2

Pour tout \mathbf{F} dans $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d)$ et pour tout G dans $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega))$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|(\mathcal{S}_{\tau}^* - \mathcal{S}_{N\tau}^*)(\theta)(\mathbf{F}, 0)\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)^d)} = 0, \quad (4.3.37)$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|(\mathcal{L}_{\tau}^* - \mathcal{L}_{N\tau}^*)(G, 0, 0)\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} = 0. \quad (4.3.38)$$

On commence par des résultats préliminaires qui nous seront utiles ultérieurement, les arguments pour prouver ces deux lemmes se reposent exactement que dans le chapitre 2.

Lemme 4.3.3

On suppose que la donnée \mathbf{f} appartienne à $L^2(0, \tilde{T}; H^\sigma(\Omega)^d)$, $\sigma > \frac{d}{2}$, on a l'inégalité suivante pour tout $t \in]0, \tilde{T}[$

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle \mathcal{G}_1(\mathbf{u}_{N\tau}) - \mathcal{G}_{N\tau 1}(\mathbf{u}_{N\tau}), \mathbf{v}_N \rangle ds \\ \leq c \left(N^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_{N\tau}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)^d)}^2 + N^{-\sigma} \|\mathbf{f}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^\sigma(\Omega)^d)} \right) \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}, \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

avec

$$\langle \mathcal{G}_1(\mathbf{u}_{N\tau}), \mathbf{v}_N \rangle = (\mathbf{f} - (\mathbf{u}_{N\tau} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N\tau}, \mathbf{v}_N).$$

Lemme 4.3.4

Il existe une constante $c > 0$ vérifiant la propriété de continuité suivante

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_{N\tau 1}(\mathbf{u}_{N\tau}), \mathbf{v}_N \rangle \\ \leq c \left(\|\mathbf{u}_{N\tau}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)^d)}^2 + \|I_N \mathbf{f}\|_{L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega)^d)} \right) \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}. \end{aligned} \quad (4.3.40)$$

Comme dans le cas discret chapitre 2, pour des raisons techniques, on introduit une approximation $\mathbf{U}_{N\tau}^* = (\mathbf{u}_{N\tau}^*, T_{N\tau}^*)$ de la solution \mathbf{U} dans $\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$ qui satisfait pour $0 \leq r \leq \rho$,

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}^*)(\cdot, t)\|_{H^r(\Omega)^d} &\leq c N^{r-\rho} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^\rho(\Omega)^d}, \\ \|(T - T_{N\tau}^*)(\cdot, t)\|_{H^{r+1}(\Omega)} &\leq c N^{r-\rho} \|T(\cdot, t)\|_{H^{\rho+1}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.3.41)$$

Nous réfèrons à [9, Thm 7.4] ([11, Chap. III, Thm 2.4 & Chap. VI, Thm. 2.5]) pour l'existence d'une telle approximation.

À partir de maintenant, on note par

$$\mathbb{Z} = L^2(0, \tilde{T}; H_0^1(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)).$$

On introduit aussi l'espace discret, i.e, l'espace $\mathbb{Z}_{N\tau}$ des fonctions qui sont affines sur chaque intervalle $[t_{j-1}, t_j]$, $1 \leq j \leq J$, et telles que leur valeurs à l'instant t_j appartiennent à $\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$. Il est clair que cet espace est un sous-espace de \mathbb{Z} de dimension finie.

On note par $\mathcal{E}(\mathbb{Z})$ l'espace des endomorphismes de \mathbb{Z} , nous sommes amenés à faire des hypothèses sur la solution $(\mathbf{u}, \mathbf{p}, T)$ du problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4).

Hypothèses 4.3.1 La solution $(\mathbf{u}, \mathbf{p}, T)$ du problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4)

(i) est telle que $D\mathcal{F}(\mathbf{U})$ est un isomorphisme de \mathbb{Z} ,

(ii) La solution (\mathbf{u}, T) appartienne à $H^1(0, \tilde{T}; H^\rho(\Omega)^d) \times H^1(0, \tilde{T}; H^\rho(\Omega))$, $\rho > 1$.

Lemme 4.3.5

On suppose que v est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , à dérivée bornées. Soit (\mathbf{u}, p, T) solution du problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4) vérifiant les hypothèses 4.3.1. Il existe alors un entier τ_0 et N_0 tel que pour tout τ , $|\tau| \leq \tau_0$ et pour tout $N \geq N_0$, l'opérateur $D\mathcal{F}_{N\tau}(\mathbf{u}_{N\tau}^*)$ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}_{N\tau}$. De plus, la norme de son inverse est bornée indépendamment de τ et N .

Démonstration. On commence par écrire la décomposition suivante

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}_{N\tau}(\mathbf{u}_{N\tau}^*) &= D\mathcal{F}(\mathbf{u}) - \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- T_{N\tau}^*) - \mathcal{S}^*(T) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{N\tau}^* - \mathcal{L}^* \end{pmatrix} D\mathcal{G}(\mathbf{u}) \\ &\quad - \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- T_{N\tau}^*) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{N\tau}^* \end{pmatrix} (D\mathcal{G}(\mathbf{u}_{N\tau}^*) - D\mathcal{G}(\mathbf{u})) \\ &\quad - \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- T_{N\tau}^*) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{N\tau}^* \end{pmatrix} (D\mathcal{G}_{N\tau}(\mathbf{u}_{N\tau}^*) - D\mathcal{G}(\mathbf{u}_{N\tau}^*)). \\ &\quad - \begin{pmatrix} D\mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- T_{N\tau}^*) - D\mathcal{S}^*(T) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{G}(\mathbf{u}) \\ &\quad - \begin{pmatrix} D\mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- T_{N\tau}^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathcal{G}(\mathbf{u}_{N\tau}^*) - \mathcal{G}(\mathbf{u})) \\ &\quad - \begin{pmatrix} D\mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- T_{N\tau}^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathcal{G}_{N\tau}(\mathbf{u}_{N\tau}^*) - \mathcal{G}(\mathbf{u}_{N\tau}^*)) \end{aligned}$$

En utilisant (i) de l'hypothèse 4.3.1, on aura le résultat désiré si les six derniers termes à droite tendent vers zéro quand $|\tau|$ et N^{-1} tendent vers zéro dans la norme de l'espace $\mathcal{E}(\mathbb{Z})$.

i) Soit $W_{N\tau} = (\mathbf{w}_{N\tau}, R_{N\tau})$ un élément de la sphère unité de $\mathbb{Z}_{N\tau}$, on a

$$D\mathcal{G}(\mathbf{u}) \cdot W_{N\tau} = \begin{pmatrix} -((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w}_{N\tau} + (\mathbf{w}_{N\tau} \cdot \nabla)\mathbf{u}, 0) \\ -((\mathbf{u} \cdot \nabla)R_{N\tau} + (\mathbf{w}_{N\tau} \cdot \nabla)T, 0, 0) \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathbb{Z}_{N\tau}$ est de dimension finie, on déduit par l'hypothèse de régularité sur la solution \mathbf{u} que les termes $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w}_{N\tau} + (\mathbf{w}_{N\tau} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ et $(\mathbf{u} \cdot \nabla)R_{N\tau} + (\mathbf{w}_{N\tau} \cdot \nabla)T$ appartiennent à un sous-ensemble compact de $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)^d)$ et $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))$ respectivement. Ainsi, en combinant avec cette expression $(\mathcal{S}_{N\tau}^* - \mathcal{S}^*)(\theta) = (\mathcal{S}_{N\tau}^* - \mathcal{S}_\tau^*)(\theta) + (\mathcal{S}_\tau^* - \mathcal{S}^*)(\theta)$, et $\mathcal{L}_{N\tau}^* - \mathcal{L}^* = (\mathcal{L}_{N\tau}^* - \mathcal{L}_\tau^*) + (\mathcal{L}_\tau^* - \mathcal{L}^*)$, en additionnant tout cela avec (4.3.27), (4.3.28), (4.3.37) et (4.3.38) donne

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \lim_{|\tau| \rightarrow 0} \left\| \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- T_{N\tau}^*) - \mathcal{S}^*(T) & 0 \\ 0 & \mathcal{L} - \mathcal{L}_{N\tau}^* \end{pmatrix} D\mathcal{G}(\mathbf{u}) \right\|_{\mathcal{E}(\mathbb{Z})} = 0. \quad (4.3.42)$$

ii) Par la définition de $D\mathcal{G}$, on est ramenés à étudier ces deux termes

$$\begin{aligned} &((\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}^*) \cdot \nabla)\mathbf{w}_{N\tau} + (\mathbf{w}_{N\tau} \cdot \nabla)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}^*), \\ &((\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}^*) \cdot \nabla)R_{N\tau} + (\mathbf{w}_{N\tau} \cdot \nabla)(T - T_{N\tau}^*). \end{aligned}$$

En utilisant (4.3.41) avec (4.3.33) et (4.3.34), donne

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \lim_{|\tau| \rightarrow 0} \left\| \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- T_{N\tau}^*) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{N\tau}^* \end{pmatrix} (D\mathcal{G}(\mathbf{U}_{N\tau}^*) - D\mathcal{G}(\mathbf{U})) \right\|_{\mathcal{E}(\mathbb{Z})} = 0. \quad (4.3.43)$$

iii) Par la définition de $D\mathcal{G}$ et $D\mathcal{G}_{N\tau}$,

$$\begin{aligned} & \langle D\mathcal{G}_{N\tau}(\mathbf{U}_{N\tau}^*) - D\mathcal{G}(\mathbf{U}_{N\tau}^*), \mathbf{v}_N \rangle \cdot \mathbf{W}_{N\tau} \\ &= \left(\begin{pmatrix} ((\mathbf{u}_{N\tau}^* \cdot \nabla) \mathbf{w}_{N\tau} + (\mathbf{w}_{N\tau} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N\tau}^*, \mathbf{v}_N) - ((\mathbf{u}_{N\tau}^* \cdot \nabla) \mathbf{w}_{N\tau} + (\mathbf{w}_{N\tau} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{N\tau}^*, \mathbf{v}_N)_N, 0 \\ ((\mathbf{u}_{N\tau}^* \cdot \nabla) \mathbf{R}_{N\tau} + (\mathbf{w}_{N\tau} \cdot \nabla) \mathbf{T}_{N\tau}^*) - ((\mathbf{u}_{N\tau}^* \cdot \nabla) \mathbf{R}_{N\tau} + (\mathbf{w}_{N\tau} \cdot \nabla) \mathbf{T}_{N\tau}^*)_N, 0, 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

L'idée se traite de la même façon pour les deux composantes, on va considérer donc uniquement la première composante, pour cela soit N' la partie entière de $\frac{N-1}{2}$, on introduit une approximation $\mathbf{u}_{N'}$ de $\mathbf{u}_{N\tau}^*$ dans $\mathbb{P}_{N'}(\Omega)^d$, par les mêmes arguments du Lemme 2.6.4, on déduit que

$$\langle D\mathcal{G}_{N\tau}(\mathbf{U}_{N\tau}^*) - D\mathcal{G}(\mathbf{U}_{N\tau}^*), \mathbf{v}_N \rangle \cdot \mathbf{W}_{N\tau} \leq c N^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_{N\tau}^*\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)^d)}^2 \|\mathbf{v}_N\|_{H^1(\Omega)^d}.$$

Combinant ce résultat avec (4.3.33) et (4.3.34), donne

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \lim_{|\tau| \rightarrow 0} \left\| \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- T_{N\tau}^*) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{N\tau}^* \end{pmatrix} (D\mathcal{G}_{N\tau}(\mathbf{U}_{N\tau}^*) - D\mathcal{G}(\mathbf{U}_{N\tau}^*)) \right\|_{\mathcal{E}(\mathbb{Z})} = 0. \quad (4.3.44)$$

iv) D'autre part, on note que pour tout \mathbf{F} dans $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d)$,

$$\begin{aligned} (D\mathcal{S}^*(T) \mathbf{R}_{N\tau})(T)(\mathbf{F}, \mathbf{u}_0) &= \mathcal{S}^*(T) (-\operatorname{div}(\partial_\theta \mathbf{v}(T) \mathbf{R}_{N\tau} \nabla \mathcal{S}^*(T) \mathbf{F}), 0), \\ (D\mathcal{S}_{N\tau}^*(T) \mathbf{R}_{N\tau})(\pi_\tau^- T_{N\tau}^*)(\mathbf{F}, \mathbf{u}_0) \\ &= \mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- T_{N\tau}^*) (-\operatorname{div}(\partial_\theta \mathbf{v}(T) \mathbf{R}_{N\tau} \nabla \mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- T_{N\tau}^*) \mathbf{F}), 0). \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

En soustrayant la première ligne de la deuxième ligne, on aura :

$$\begin{aligned} (D(\mathcal{S}^* - \mathcal{S}_{N\tau}^*) \mathbf{R}_{N\tau})(T)(\mathbf{F}, \mathbf{u}_0) &= (\mathcal{S}^* - \mathcal{S}_{N\tau}^*)(T) (-\operatorname{div}(\partial_\theta \mathbf{v}(T) \mathbf{R}_{N\tau} \nabla \mathcal{S}^*(T) \mathbf{F}), 0) \\ &\quad + \mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- T_{N\tau}^*) (-\operatorname{div}(\partial_\theta \mathbf{v}(T) \mathbf{R}_{N\tau} \nabla (\mathcal{S}^* - \mathcal{S}_{N\tau}^*)(T) \mathbf{F}), 0) \end{aligned}$$

En notant par $(\mathbf{F}, \mathbf{u}_0)$ le premier composant de $\mathcal{G}(\mathbf{U})$, on remarque que $\mathcal{S}^*(\theta)(\mathbf{F}, \mathbf{u}_0)$ égal à \mathbf{u} , d'après (4.3.5). On déduit par l'hypothèse de la régularité sur la solution \mathbf{u} que, quand $\mathbf{W}_{N\tau}$ parcourt la sphère unité de $\mathbb{Z}_{N\tau}$ la quantité $-\operatorname{div}(\partial_\theta \mathbf{v}(T) \mathbf{R}_{N\tau} \nabla \mathcal{S}^*(T) \mathbf{F})$ appartienne à un sous ensemble compact de $\mathcal{C}^0(0, \tilde{T}; H^{-1}(\Omega)^d)$. Ainsi, la convergence du premier terme découle du (4.3.37) et (4.3.27).

Pour traiter le deuxième terme, on remarque d'après (4.3.33) il suffit de prouver la convergence de $\|\nabla(\mathcal{S}^* - \mathcal{S}_{N\tau}^*)(T) \mathbf{F}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)^d)}$.

Or,

Par conséquent,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \lim_{|\tau| \rightarrow 0} \left\| \begin{pmatrix} D\mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- T_{N\tau}^*) - D\mathcal{S}^*(T) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{G}(\mathbf{U}) \right\|_{\mathcal{E}(\mathbb{Z})} = 0. \quad (4.3.46)$$

iv) La convergence du cinquième terme est déduite de (4.3.41), (4.3.33) et (4.3.34) la stabilité de $D\mathcal{S}_{N\tau}^*(\theta)$ et la convergence du dernier terme est obtenu par la formule (4.3.39) et par la stabilité aussi de $D\mathcal{S}_{N\tau}^*(\theta)$.

Ceci achève la démonstration de la première partie de ce Lemme.

Lemme 4.3.6

On suppose que la fonction v appartient à $W^{2,\infty}(\mathbb{R})$, à dérivée lipschitzienne. Il existe un voisinage de $U_{N\tau}^*$ dans $\mathbb{Z}_{N\tau}$ et une constante $c > 0$ tel que l'opérateur $D\mathcal{F}_{N\tau}$ satisfait cette propriété de Lipschitz, pour tout \tilde{U}_N dans ce voisinage,

$$\|D\mathcal{F}_{N\tau}(U_{N\tau}^*) - D\mathcal{F}_{N\tau}(\tilde{U}_N)\|_{\mathcal{E}(\mathbb{Z})} \leq c \|U_{N\tau}^* - \tilde{U}_N\|_{\mathbb{Z}}. \quad (4.3.47)$$

Démonstration. En posant $\tilde{U}_N = (\tilde{u}_N, \tilde{T}_N)$, on a

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}_{N\tau}(U_{N\tau}^*) - D\mathcal{F}_{N\tau}(\tilde{U}_N) &= \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_{\tau}^- \tilde{T}_N) - \mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_{\tau}^- T_{N\tau}^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D\mathcal{G}_{N\tau}(U_{N\tau}^*) \\ &\quad + \begin{pmatrix} D\mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_{\tau}^- \tilde{T}_N) - D\mathcal{S}_{N\tau}^*(T_{N\tau}^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{G}_{N\tau}(U_{N\tau}^*) \\ &\quad + \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_{\tau}^- \tilde{T}_N) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{N\tau}^* \end{pmatrix} (D\mathcal{G}_{N\tau}(\tilde{U}_N) - D\mathcal{G}_{N\tau}(U_{N\tau}^*)) \\ &\quad + \begin{pmatrix} D\mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_{\tau}^- \tilde{T}_N) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathcal{G}_{N\tau}(\tilde{U}_N) - \mathcal{G}_{N\tau}(U_{N\tau}^*)) \end{aligned}$$

Nous devons évaluer ces quantités, pour tout $W_{N\tau} = (w_{N\tau}, R_{N\tau})$ dans la sphère unité de $\mathbb{Z}_{N\tau}$. L'analyse des deux derniers termes vient du lemme 4.3.4 (et une généralisation de ce lemme), on va considérer donc uniquement les deux premiers termes. Pour tout ce qui suit, la constante c dépend des normes $\|U_{N\tau}^*\|_{\mathbb{Z}}$, $\|\tilde{U}_N\|_{\mathbb{Z}}$ et $\|v\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R})}$.

1) On a

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_{\tau}^- \tilde{T}_N) - \mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_{\tau}^- T_{N\tau}^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D\mathcal{G}_{N\tau}(U_{N\tau}^*) W_{N\tau} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_{\tau}^- T_{N\tau}^*) - \mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_{\tau}^- \tilde{T}_N))((u_{N\tau}^* \cdot \nabla) w_{N\tau} + (w_{N\tau} \cdot \nabla) u_{N\tau}^*, 0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_*^1 - u_{**}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} u_*^1 &= \mathcal{S}_{N\tau}^*(T_{N\tau}^*)((u_{N\tau}^* \cdot \nabla) w_{N\tau} + (w_{N\tau} \cdot \nabla) u_{N\tau}^*, 0) \\ u_{**}^2 &= \mathcal{S}_{N\tau}^*(\tilde{T}_N)((u_{N\tau}^* \cdot \nabla) w_{N\tau} + (w_{N\tau} \cdot \nabla) u_{N\tau}^*, 0) \end{aligned}$$

où u_*^1 et u_{**}^2 vérifient les deux équations suivantes :

$$\partial_t u_*^1 - \operatorname{div}(v(T_{N\tau}^*) \nabla u_*^1) + \nabla p_*^1 = (u_{N\tau}^* \cdot \nabla) w_{N\tau} + (w_{N\tau} \cdot \nabla) u_{N\tau}^*,$$

et

$$\partial_t u_{**}^2 - \operatorname{div}(v(\tilde{T}_N) \nabla u_{**}^2) + \nabla p_{**}^2 = (u_{N\tau}^* \cdot \nabla) w_{N\tau} + (w_{N\tau} \cdot \nabla) u_{N\tau}^*.$$

En soustrayant la première de la deuxième équation, on obtient

$$\partial_t(u_*^1 - u_{**}^2) - \operatorname{div}(\nu(T_{N\tau}^*)\nabla(u_*^1 - u_{**}^2)) + \nabla(p_*^1 - p_{**}^2) = \operatorname{div}((\nu(T_{N\tau}^*) - \nu(\tilde{T}_N))\nabla u_{**}^2)$$

Ce qui nous permet d'écrire l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} u_*^1 - u_{**}^2 &= \mathcal{S}_{N\tau}^*(T_{N\tau}^*)(\operatorname{div}(\nu(T_{N\tau}^*) - \nu(\tilde{T}_N))\nabla u_{**}^2) \\ &= \mathcal{S}_{N\tau}^*(T_{N\tau}^*)(\operatorname{div}(\nu(T_{N\tau}^*) - \nu(\tilde{T}_N))\nabla \mathcal{S}_{N\tau}^*(\tilde{T}_N)) \\ &\quad ((\mathbf{u}_{N\tau}^* \cdot \nabla)\mathbf{w}_{N\tau} + (\mathbf{w}_{N\tau} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{N\tau}^*, 0) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{S}_{N\tau}^*(\tilde{T}_N - T_{N\tau}^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D\mathcal{G}_{N\tau}(\mathbf{u}_{N\tau}^*)\mathbf{w}_{N\tau} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{N\tau}^*(T_{N\tau}^*) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{N\tau}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A_{N\tau}, 0), \\ 0 \end{pmatrix}$$

où

$$A_{N\tau} = \operatorname{div}(\nu(T_{N\tau}^*) - \nu(\tilde{T}_N))\nabla \mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- \tilde{T}_N)((\mathbf{u}_{N\tau}^* \cdot \nabla)\mathbf{w}_{N\tau} + (\mathbf{w}_{N\tau} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{N\tau}^*)$$

D'après la propriété de Lipschitz sur ν , il existe une constante c telle que,

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{N\tau}^*(\tilde{T}_N - T_{N\tau}^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D\mathcal{G}_{N\tau}(\mathbf{u}_{N\tau}^*)\mathbf{w}_{N\tau} \right\|_{\mathbb{Z}} \leq c \|\tilde{T}_N - T_{N\tau}^*\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{w}_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)}$$

Ceci achève la démonstration de 1).

2) On a

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} D\mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- \tilde{T}_N) - D\mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- T_{N\tau}^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{G}_{N\tau}(\mathbf{u}_{N\tau}^*) \\ &= \begin{pmatrix} D\mathcal{S}_{N\tau}^*(\tilde{T}_N - T_{N\tau}^*)\mathbf{R}_{N\tau}(\mathbf{f} - (\mathbf{u}_{N\tau}^* \cdot \nabla)\mathbf{u}_{N\tau}^*, \mathbf{v}_N)_N \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'autre part, en combinant la deuxième partie de (4.3.45)

$$\left\| \begin{pmatrix} D\mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- \tilde{T}_N) - D\mathcal{S}_{N\tau}^*(\pi_\tau^- T_{N\tau}^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{G}_{N\tau}(\mathbf{u}_{N\tau}^*) \right\|_{\mathbb{Z}} \leq c \|\tilde{T}_N - T_{N\tau}^*\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{R}_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.3.48)$$

Les mêmes arguments de la partie 1) achève la démonstration.

On peut maintenant montrer l'estimation donnée par le Lemme suivant :

Lemme 4.3.7

Supposons que ν est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , la solution (\mathbf{u}, p, T) du problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4) appartient à $L^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^{s-1}(\Omega)) \times L^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega))$, pour un entier $s > \frac{d-1}{2}$ et les données (\mathbf{f}, T_b) appartiennent à $L^2(0, \tilde{T}; H^\sigma(\Omega)^d) \times L^2(0, \tilde{T}; H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$, pour un entier $\sigma > \frac{d}{2}$. On a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_{N\tau}(\mathbf{u}_{N\tau}^*)\|_{\mathbb{Z}} &\leq c \left((|\tau| + N^{1-s}) (\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega)^d)} + \|T\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega))} + \|p\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{s-1}(\Omega))}) \right) \\ &\quad + c' \left((|\tau| + N^{-\sigma}) (\|\mathbf{f}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^\sigma(\Omega)^d)} + \|T_b\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}) \right). \end{aligned}$$

Démonstration. Comme $\mathcal{F}(\mathbf{U})$ est égal à zéro, on a Le premier terme est déjà majoré dans (4.3.41). Pour évaluer le second terme, on utilise (4.3.25), (4.3.35), (4.3.26) et (4.3.36) en notant que : Si \mathbf{F} désigne le premier composant de $\mathcal{G}(\mathbf{U})$, $\mathcal{S}^*(\theta)\mathbf{F}$ égal à \mathbf{u} et \mathbf{F} égal à $\partial_t \mathbf{u} - \operatorname{div}(\nu(\mathbf{T})\nabla \mathbf{u}) + \mathbf{grad} \, p$. Pour majorer le troisième terme, on applique la formule (4.3.33) et (4.3.34), l'inégalité triangulaire et l'estimation (4.3.41). Finalement, pour estimer le quatrième terme nous utilisons encore la stabilité (4.3.33) et (4.3.34) combinés avec le Lemme 4.3.3.

Grâce aux lemmes 4.3.5 à 4.3.7, nous sommes à présent en mesure de prouver le principal résultat de ce chapitre, voir [13] et [24, Chap. IV, Thm 3.1].

Théorème 4.3.1

Soit $(\mathbf{u}, p, \mathbf{T})$ une solution du problème (3.3.2)–(3.3.3)–(3.3.4) qui satisfait l'hypothèse 4.3.1 et qui appartient à $H^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega)^d) \times H^2(0, \tilde{T}; H^{s-1}(\Omega)) \times H^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega))$ pour un entier $s > \frac{d}{2} - 1$. Supposons que les données $(\mathbf{f}, \mathbf{T}_b)$ appartiennent à $L^2(0, \tilde{T}; H^\sigma(\Omega)^d) \times H^2(0, \tilde{T}; H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$, pour un entier $\sigma > \frac{d}{2}$. Supposons de plus que la fonction ν est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} à dérivées bornées. Alors, il existe un voisinage de (\mathbf{u}, \mathbf{T}) et un entier positif τ_0 et N_0 , tel que pour tout τ , $|\tau| \leq \tau_0$ et pour tout $N \geq N_0$, le problème (4.2.1)–(4.2.2)–(4.2.3) admet une solution unique $(\mathbf{u}_{N\tau}, p_{N\tau}, \mathbf{T}_{N\tau})$ dans ce voisinage. De plus, cette solution satisfait

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega)^d)} + \|\mathbf{T} - \mathbf{T}_{N\tau}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^1(\Omega))} + N^{-(d-1)/2} \|p - p_{N\tau}\|_{L^2(0, \tilde{T}; L^2(\Omega))} \\ & \leq c \left((|\tau| + N^{1-s}) (\|\mathbf{u}\|_{H^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega)^d)} + \|\mathbf{T}\|_{H^2(0, \tilde{T}; H^s(\Omega))} + \|p\|_{H^2(0, \tilde{T}; H^{s-1}(\Omega))}) \right) \\ & \quad + c' \left((|\tau| + N^{-\sigma}) (\|\mathbf{f}\|_{L^2(0, \tilde{T}; H^\sigma(\Omega)^d)} + \|\mathbf{T}_b\|_{H^2(0, \tilde{T}; H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}) \right). \end{aligned} \quad (4.3.49)$$

4.4 Résultats numériques

Notre but est de confirmer numériquement les résultats théoriques obtenus pour les équations de Navier-Stokes/chaleur instationnaires. On rappelle notre système :

Trouver $(\mathbf{u}_N^j)_{1 \leq j \leq J} \in (\mathbb{X}_N)^J$, $(p_N^j)_{1 \leq j \leq J} \in (\mathbb{M}_N)^J$ et $(T_N^j)_{1 \leq j \leq J} \in (\mathbb{Y}_N)^J$ tel que

$$\mathbf{u}_N^0 = I_N \mathbf{u}_0 \quad \text{et} \quad T_N^0 = i_N T_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.4.1)$$

tel que, pour tout j , $1 \leq j \leq J$,

$$T_N^j = i_N^{\partial\Omega} T_b^j \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (4.4.2)$$

et pour tout j , $1 \leq j \leq J$,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, \quad & (\mathbf{u}_N^j, \mathbf{v}_N)_N + \tau_j (\nu(T_N^{j-1}) \mathbf{grad} \mathbf{u}_N^j, \mathbf{grad} \mathbf{v}_N)_N + \tau_j ((\mathbf{u}_N^j \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^j, \mathbf{v}_N)_N \\ & - \tau_j (\operatorname{div} \mathbf{v}_N, p_N^j)_N = (\mathbf{u}_N^{j-1}, \mathbf{v}_N)_N + \tau_j (\mathbf{f}^j, \mathbf{v}_N)_N, \\ \forall q_N \in \mathbb{M}_N, \quad & -(\operatorname{div} \mathbf{u}_N^j, q_N)_N = 0, \\ \forall S_N \in \mathbb{Y}_N^0, \quad & (T_N^j, S_N)_N + \alpha \tau_j (\mathbf{grad} T_N^j, \mathbf{grad} S_N)_N + \tau_j ((\mathbf{u}_N^j \cdot \nabla) T_N^j, S_N)_N \\ & = (T_N^{j-1}, S_N)_N + \tau_j (g^j, S_N)_N. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

On utilisera toutefois l'algorithme suivant vérifiant (4.4.1) et (4.4.2) :

Pour tout j , $1 \leq j \leq J$,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_N \in \mathbb{X}_N, \quad & (\mathbf{u}_N^j, \mathbf{v}_N)_N + \tau_j (\nu(T_N^{j-1}) \mathbf{grad} \mathbf{u}_N^j, \mathbf{grad} \mathbf{v}_N)_N \\ & + \frac{\tau_j}{2} ((\mathbf{u}_N^j \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^{j-1} + (\mathbf{u}_N^{j-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^j, \mathbf{v}_N)_N \\ & - \tau_j (\operatorname{div} \mathbf{v}_N, p_N^j)_N = (\mathbf{u}_N^{j-1}, \mathbf{v}_N)_N + \tau_j (\mathbf{f}^j, \mathbf{v}_N)_N, \\ \forall q_N \in \mathbb{M}_N, \quad & -(\operatorname{div} \mathbf{u}_N^j, q_N)_N = 0, \\ \forall S_N \in \mathbb{Y}_N^0, \quad & (T_N^j, S_N)_N + \alpha \tau_j (\mathbf{grad} T_N^j, \mathbf{grad} S_N)_N \\ & + \frac{\tau_j}{2} ((\mathbf{u}_N^{j-1} \cdot \nabla) T_N^j + (\mathbf{u}_N^j \cdot \nabla) T_N^{j-1}, S_N)_N \\ & = (T_N^{j-1}, S_N)_N + \tau_j (g^j, S_N)_N. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

4.4.1 Système matriciel :

On note que la famille $\ell_i \ell_k$ pour $1 \leq i, k \leq N-1$, forme une base de $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$. Les inconnues pour le vecteur vitesse sont ses valeurs aux points de $\Sigma_N \cap \Omega$, donc un polynôme $\mathbf{u}_N(.,.)$ s'écrit :

$$\mathbf{u}_N(x, y) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{u}_{ik} \ell_i(x) \ell_k(y)$$

où $\mathbf{u}_{ik} = \mathbf{u}_N(\xi_i, \xi_k)$. Pour la pression, étant donnée qu'elle est dans $\mathbb{P}_{N-2}(\Omega)$, on la décompose dans la base de $\mathbf{m}_i \mathbf{m}_k$. On a alors la décomposition suivante :

$$p_N(x, y) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} p_{ik} \mathbf{m}_i(x) \mathbf{m}_k(y)$$

où $p_{ik} = p_N(\xi_i, \xi_k)$. Pour la température, on la décompose dans la base $\ell_i \ell_k$ pour $1 \leq i, k \leq N-1$. On a alors la décomposition suivante

$$T_N(x, y) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} T_{ik} \ell_i(x) \ell_k(y) + \sum_{(i,k) \in \mathcal{M}} T_b(\xi_i, \xi_k) \ell_i(x) \ell_k(y)$$

avec

$$T_{ik} = T_N(\xi_i, \xi_k).$$

Système linéaire

Nous nous intéressons à l'écriture du système algébrique issu du problème (4.4.4) sur le carré $\Omega =]-1, 1[^2$ lorsque les entiers r et s varient dans $[1, N-1]$.

Pour tout j , $1 \leq j \leq J$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{(i,k) \in \mathcal{L}} \mathbf{u}_{ik}^j ((\ell_i \otimes \ell_k), (\ell_r \otimes \ell_s))_N + \tau_j \sum_{(i,k) \in \mathcal{L}} \mathbf{u}_{ik}^j (\nabla(T_N^{j-1}) \nabla(\ell_i \otimes \ell_k), \nabla(\ell_r \otimes \ell_s))_N \\ + \frac{\tau_j}{2} \sum_{(i,k) \in \mathcal{L}} \mathbf{u}_{ik}^j ((\mathbf{u}_N^{j-1} \cdot \nabla) \ell_i \otimes \ell_k, \ell_r \otimes \ell_s)_N + \frac{\tau_j}{2} \sum_{(i,k) \in \mathcal{L}} \mathbf{u}_{ik}^j ((\ell_i \otimes \ell_k \cdot \nabla) \mathbf{u}_N^{j-1}, \ell_r \otimes \ell_s)_N \\ - \tau_j \sum_{(i,k) \in \mathcal{L}} p_{ik}^j (\text{div } \ell_r \otimes \ell_s, \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_k)_N = \mathbf{u}_N^{j-1}(\xi_r, \xi_s) \rho_r \rho_s + \tau_j \mathbf{f}^j(\xi_r, \xi_s) \rho_r \rho_s, \\ - \sum_{(i,k) \in \mathcal{L}} \mathbf{u}_{ik}^j (\text{div } \ell_i \otimes \ell_k, \mathbf{m}_r \otimes \mathbf{m}_s)_N = 0, \\ \sum_{(i,k) \in \mathcal{L}} T_{ik}^j ((\ell_i \otimes \ell_k), (\ell_r \otimes \ell_s))_N + \sum_{(i,k) \in \mathcal{L}} T_{ik}^j \alpha \tau_j (\nabla(\ell_i \otimes \ell_k), \nabla(\ell_r \otimes \ell_s))_N \\ + \frac{\tau_j}{2} \sum_{(i,k) \in \mathcal{L}} \mathbf{u}_{ik}^j ((\ell_i \otimes \ell_k \cdot \nabla) T_N^{j-1}, \ell_r \otimes \ell_s)_N + \frac{\tau_j}{2} \sum_{(i,k) \in \mathcal{L}} T_{ik}^j ((\mathbf{u}_N^{j-1} \cdot \nabla) \ell_i \otimes \ell_k, \ell_r \otimes \ell_s)_N \\ = T_N^{j-1}(\xi_r, \xi_s) \rho_r \rho_s + \tau_j g^j(\xi_r, \xi_s) \rho_r \rho_s - \sum_{(i,k) \in \mathcal{M}} T_b^j(\xi_i, \xi_k) ((\ell_i \otimes \ell_k), (\ell_r \otimes \ell_s))_N \\ - \alpha \tau_j \sum_{(i,k) \in \mathcal{M}} T_b^j(\xi_i, \xi_k) (\nabla(\ell_i \otimes \ell_k), \nabla(\ell_r \otimes \ell_s))_N \\ - \frac{\tau_j}{2} \sum_{(i,k) \in \mathcal{M}} T_b^j(\xi_i, \xi_k) ((\mathbf{u}_N^{j-1} \cdot \nabla) \ell_i \otimes \ell_k, \ell_r \otimes \ell_s)_N \end{array} \right.$$

On obtient ainsi l'équation matricielle suivante de $4(N-1)^2$ équations à $4(N-1)^2$ inconnues.

$$\left\{ \begin{array}{l} [M + \delta t A] \mathbf{U} + B^T \mathbf{P} = \tilde{\mathbf{F}} \\ B \mathbf{U} = 0 \\ [M + \delta t C] \mathbf{T} + \delta t D \mathbf{U} = \tilde{\mathbf{K}} \end{array} \right. \quad (4.4.5)$$

Le pas de temps étant désigné par δt , le vecteur U est formé des valeurs inconnues u_{ik} , le vecteur P est formé des valeurs inconnues p_{ik} et le vecteur T est formé des valeurs inconnues T_{ik} , $(i, k) \in \mathcal{L}$.

4.4.2 Mise en œuvre

Détermination des matrices

- Nous notons que la matrice A s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ 0 & \bar{A}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.4.6)$$

Nous renvoyons le lecteur aux formules de (2.8.8) à (2.8.10), (pour $m=j-1$) pour voir l'expression explicite des matrices \bar{A}_i , $i \in \{1, 2\}$.

- Nous notons que la matrice B est sous la forme :

$$B = [B_1, B_2] \text{ où } B_i = [\mathcal{B}, 0], \quad i \in \{1, 2\},$$

où \mathcal{B} est la matrice qui correspond à l'opérateur divergence. De même nous renvoyons le lecteur à la formule (2.8.11) pour voir l'expression explicite de ces matrices.

- Nous renvoyons le lecteur aux formules (2.8.12) et (2.8.14), (pour $m=j-1$) pour l'expression des matrices C et D .

- La matrice de masse M est diagonale, ses termes non nuls étant les $\rho_r \rho_s$, $(r, s) \in \mathcal{L}$.

Détermination des données

- Le vecteur \tilde{F} s'écrit encore $\tilde{F} = M\bar{F}$, où

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{pmatrix} \quad (4.4.7)$$

avec les \bar{F}_i ont pour composantes les termes $u_{iN}^{j-1}(\xi_r, \xi_s) + \delta t f_i^j(\xi_r, \xi_s)$, $(r, s) \in \mathcal{L}$.

- Le vecteur \tilde{K} s'écrit $\tilde{K} = M\bar{K}$, avec

$$\begin{aligned} \bar{K} = & T_N^{j-1}(\xi_r, \xi_s) + \delta t g^j(\xi_r, \xi_s) - \sum_{(i,k) \in \mathcal{M}} T_b^j(\xi_i, \xi_k) \\ & - \frac{1}{\rho_r \rho_s} \left[\alpha \delta t \sum_{(i,k) \in \mathcal{M}} T_b^j(\xi_i, \xi_k) (\nabla(\ell_i \otimes \ell_k), \nabla(\ell_r \otimes \ell_s))_N \right. \\ & \left. + \frac{\delta t}{2} \sum_{(i,k) \in \mathcal{M}} T_b^j(\xi_i, \xi_k) ((u_N^{j-1} \cdot \nabla) \ell_i \otimes \ell_k, \ell_r \otimes \ell_s)_N \right], \quad (r, s) \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

4.5 Algorithme pour la résolution du système linéaire

Pour résoudre le problème (4.4.5) nous appliquons l'algorithme d'Uzawa, et nous découplons le calcul de U , P et T .

On pose

$$Q = M + \delta t A \quad \text{et} \quad \tilde{Q} = M + \delta t C, \quad (4.5.1)$$

La propriété d'ellipticité entraîne que la matrice Q est symétrique, définie positive, est inversible de sorte que la première équation de (4.4.5) s'écrit

$$U = Q^{-1} \tilde{F} - Q^{-1} B^T P \quad (4.5.2)$$

Nous insérons alors cette équation dans la deuxième équation de (4.4.5), on obtient

$$B Q^{-1} \tilde{F} = B Q^{-1} B^T P \quad (4.5.3)$$

La dernière équation de (4.4.5), donne

$$\tilde{Q} T = \tilde{K} - \delta t D U. \quad (4.5.4)$$

Le système (4.4.5) est donc entièrement résolu. Nous remarquons que la matrice $B Q^{-1} B^T$ est symétrique, définie positive, donc l'équation se prête (4.5.3) se prête bien à une méthode itérative de type gradient conjugué. Puis nous procédons donc de la même manière pour l'équation (4.5.2) et (4.5.4).

4.6 Tests numériques

Le code de calcul utilisé aussi est écrit en langage MATLAB[®]. Ce dernier est une continuité du code de calcul qui a été fait pour la résolution des équations de Navier-Stokes/chaleur stationnaires, voir les résultats dans le Chapitre 2.

- Convergence en temps

Dans ce premier cas on teste la convergence du code dans le cas où l'équation de Navier-Stokes est indépendante de la température, c'est-à-dire en prenant $v(T) = 1$ en premier lieu et $v(T)(x, y) = xy t + 1$, en second lieu. Ensuite, on compare ces deux tests avec le cas où le problème est couplé avec $v(T) = \sqrt{T^2 + 1} + 2$. On choisit les solutions suivantes :

$$u(x, y) = \begin{pmatrix} \sin((\pi + t)y) \cos((\pi + t)x) \\ -\cos((\pi + t)y) \sin((\pi + t)x) \end{pmatrix}, \quad (4.6.1)$$

$$p(x, y) = \sin((\pi + t)x) \cos((\pi + t)y), \quad T(x, y) = t \sin(x + y). \quad (4.6.2)$$

Cette solution vérifie la condition initiale, la condition au bord ainsi que la condition d'incompressibilité. Ces tests ont été fait pour des pas de temps appartenant à $[10^{-4}, 10^{-1}]$. Nous résumons tous les résultats dans les tableaux suivants 4.1, 4.2 et 4.3 qui sont donnés pour $\tilde{T} = 0.1$.

Pas de temps δt	10^{-1}	5.10^{-2}	10^{-2}	5.10^{-3}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)^2}$	5.7418×10^{-4}	3.1626×10^{-4}	6.7873×10^{-5}	3.4176×10^{-5}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{H^1(\Omega)^2}$	0.042×10^{-3}	0.023×10^{-3}	4.8310×10^{-4}	2.4293×10^{-4}
$\ p - p_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	5.010×10^{-3}	0.255×10^{-3}	0.051×10^{-3}	0.025×10^{-3}
$\ T - T_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	0.029×10^{-3}	0.016×10^{-3}	3.6463×10^{-4}	1.8486×10^{-4}

Pas de temps δt	10^{-3}	5.10^{-4}	10^{-4}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)^2}$	6.8703×10^{-6}	3.4373×10^{-6}	8.1224×10^{-7}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{H^1(\Omega)^2}$	4.8781×10^{-5}	2.4405×10^{-5}	4.5312×10^{-6}
$\ p - p_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	5.0445×10^{-4}	2.5223×10^{-4}	5.0214×10^{-5}
$\ T - T_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	3.7387×10^{-5}	1.8720×10^{-5}	4.0220×10^{-6}

TABLE 4.1 – Erreur relative en fonction de δt de (4.6.1) et (4.6.2) pour $v(T) = 1$.

Pas de temps δt	10^{-1}	5.10^{-2}	10^{-2}	5.10^{-3}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)^2}$	5.3973×10^{-4}	3.6949×10^{-4}	9.3931×10^{-5}	4.8388×10^{-5}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{H^1(\Omega)^2}$	0.026×10^{-3}	0.017×10^{-3}	4.1788×10^{-4}	2.1451×10^{-4}
$\ p - p_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	5.009×10^{-3}	0.235×10^{-3}	0.052×10^{-3}	0.026×10^{-3}
$\ T - T_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	0.029×10^{-3}	0.016×10^{-3}	3.6445×10^{-4}	1.8477×10^{-4}

Pas de temps δt	10^{-3}	5.10^{-4}	10^{-4}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)^2}$	9.9118×10^{-6}	4.9707×10^{-6}	1.0127×10^{-6}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{H^1(\Omega)^2}$	4.3817×10^{-5}	2.1966×10^{-5}	5.1209×10^{-6}
$\ p - p_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	5.1951×10^{-4}	2.5988×10^{-5}	5.6759×10^{-5}
$\ T - T_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	3.7367×10^{-5}	1.8709×10^{-5}	3.7460×10^{-6}

TABLE 4.2 – Erreur relative en fonction de δt de (4.6.1) et (4.6.2) pour $v(T)(x, y) = x + y + t + 1$.

Pas de temps δt	10^{-1}	5.10^{-2}	10^{-2}	5.10^{-3}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)^2}$	5.7488×10^{-4}	3.1659×10^{-4}	2.2987×10^{-4}	3.4208×10^{-5}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{H^1(\Omega)^2}$	0.056×10^{-3}	0.034×10^{-3}	2×10^{-3}	2.4320×10^{-4}
$\ p - p_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	7.540×10^{-3}	0.345×10^{-3}	0.062×10^{-3}	0.039×10^{-3}
$\ T - T_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	0.059×10^{-3}	0.056×10^{-3}	2.6598×10^{-4}	1.9655×10^{-4}

Pas de temps δt	10^{-3}	5.10^{-4}	10^{-4}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)^2}$	6.8766×10^{-5}	3.4723×10^{-6}	1.0015×10^{-5}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{H^1(\Omega)^2}$	4.8835×10^{-5}	2.5093×10^{-5}	3.8159×10^{-6}
$\ p - p_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	5.1045×10^{-4}	2.5247×10^{-4}	4.5284×10^{-5}
$\ T - T_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	3.9524×10^{-5}	1.8720×10^{-5}	3.1209×10^{-6}

TABLE 4.3 – Erreur relative en fonction de δt de (4.6.1) et (4.6.2) pour $v(T) = \sqrt{T^2 + 1} + 2$.

Nous remarquons une très bonne convergence entre le problème couplé et celui non couplé. Dans la Figure 4.1 on utilise les mêmes résultats des tableaux, pour représenter les courbes des erreurs du $\log_{10} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)^2} \right)$, $\log_{10} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\|_{H^1(\Omega)^2} \right)$, $\log_{10} \left(\|p - p_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)} \right)$, et $\log_{10} \left(\|T - T_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)} \right)$ en fonction du logarithme du pas de temps.

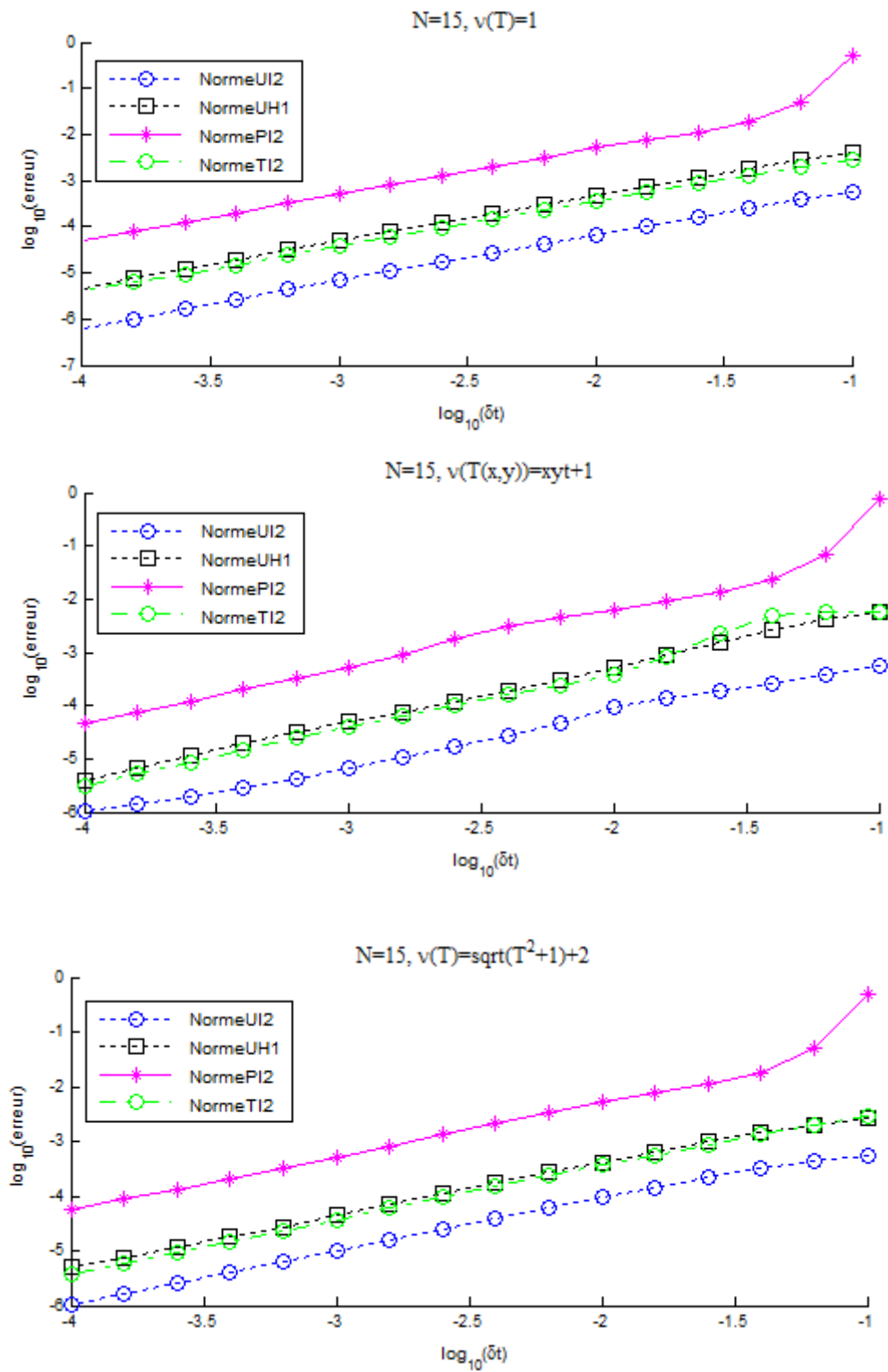


FIGURE 4.1 – Les courbes d'erreur pour $v(T) = 1, v(T)(x,y) = xyt + 1$ et $v(T) = \sqrt{T^2 + 1} + 2$ en fonction du logarithme du pas de temps.

- Convergence en espace

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} t(1-x^2)^{\frac{5}{2}}y(1-y^2)^{\frac{3}{2}} \\ -t(1-x^2)^{\frac{3}{2}}x(1-y^2)^{\frac{5}{2}} \end{pmatrix}, \quad (4.6.3)$$

$$p(x, y) = \sin(xyt), \quad T(x, y) = x^2 + y^2 + t. \quad (4.6.4)$$

Nous résumons tous les résultats obtenus pour cette solution dans les tableaux 4.4 et 4.5 ci-dessous dans le cas où $\tilde{T} = 1$ et $\tilde{T} = 0.1$.

N	5	10	15	20
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)^2}$	0.176×10^{-3}	0.019×10^{-3}	5.7494×10^{-4}	2.4404×10^{-4}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{H^1(\Omega)^2}$	0.405×10^{-3}	0.099×10^{-3}	0.035×10^{-3}	0.021×10^{-3}
$\ \mathbf{p} - \mathbf{p}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	0.274×10^{-3}	0.030×10^{-3}	0.014×10^{-3}	0.012×10^{-3}
$\ \mathbf{T} - \mathbf{T}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	3.8820×10^{-5}	8.6566×10^{-6}	7.8742×10^{-6}	1.3714×10^{-6}
$\ \mathbf{T} - \mathbf{T}_{N\tau}\ _{H^1(\Omega)}$	1.3416×10^{-4}	8.5489×10^{-5}	1.1450×10^{-4}	2.6126×10^{-5}

N	25	30	35
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)^2}$	1.2591×10^{-4}	7.3548×10^{-5}	4.6954×10^{-5}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{H^1(\Omega)^2}$	0.013×10^{-3}	9.1675×10^{-4}	6.5218×10^{-4}
$\ \mathbf{p} - \mathbf{p}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	0.012×10^{-3}	0.012×10^{-3}	0.012×10^{-3}
$\ \mathbf{T} - \mathbf{T}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	2.1545×10^{-6}	4.9411×10^{-7}	9.3316×10^{-7}
$\ \mathbf{T} - \mathbf{T}_{N\tau}\ _{H^1(\Omega)}$	5.3158×10^{-5}	1.3714×10^{-5}	3.2126×10^{-5}

TABLE 4.4 – Erreur relative en fonction de N de (4.6.3) et (4.6.4) pour $\tilde{T} = 1$.

N	5	10	15	20
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)^2}$	0.011×10^{-3}	1.4192×10^{-4}	4.1757×10^{-5}	1.7666×10^{-5}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{H^1(\Omega)^2}$	0.027×10^{-3}	9.0860×10^{-4}	3.2988×10^{-4}	2.0752×10^{-4}
$\ \mathbf{p} - \mathbf{p}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	0.034×10^{-3}	4.0581×10^{-4}	1.6282×10^{-4}	1.2439×10^{-4}
$\ \mathbf{T} - \mathbf{T}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	2.7278×10^{-6}	8.2918×10^{-7}	7.4773×10^{-7}	1.2626×10^{-7}
$\ \mathbf{T} - \mathbf{T}_{N\tau}\ _{H^1(\Omega)}$	9.0125×10^{-6}	7.7929×10^{-6}	1.0929×10^{-5}	2.5270×10^{-6}

N	25	30	35
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)^2}$	9.1017×10^{-6}	5.3167×10^{-6}	3.4005×10^{-6}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{H^1(\Omega)^2}$	1.2414×10^{-4}	9.0628×10^{-5}	6.5218×10^{-5}
$\ \mathbf{p} - \mathbf{p}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	1.1663×10^{-4}	1.1472×10^{-4}	1.1413×10^{-4}
$\ \mathbf{T} - \mathbf{T}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	2.1061×10^{-7}	4.4554×10^{-8}	9.0949×10^{-8}
$\ \mathbf{T} - \mathbf{T}_{N\tau}\ _{H^1(\Omega)}$	5.2336×10^{-6}	1.3505×10^{-6}	3.1869×10^{-6}

TABLE 4.5 – Erreur relative en fonction de N de (4.6.3) et (4.6.4) pour $\tilde{T} = 0.1$.

Les Figures 4.3 et 4.2 montrent l'évolution $\log_{10} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)^2} \right)$, $\log_{10} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\|_{H^1(\Omega)^2} \right)$, $\log_{10} \left(\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)} \right)$, et $\log_{10} \left(\|T - T_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)} \right)$ en fonction de N et ceci dans les deux cas en considérant le pas du temps fixé à 10^{-2} , $\tilde{T} = 0.1$ et en choisissant $\nu(T) = \frac{1}{T^2 + 1}$ pour la Figure 4.3 et en considérant aussi le pas du temps fixé à 10^{-2} , $\nu(T) = \frac{1}{T^2 + 1}$ mais en prenant $\tilde{T} = 1$ pour la Figure 4.2.

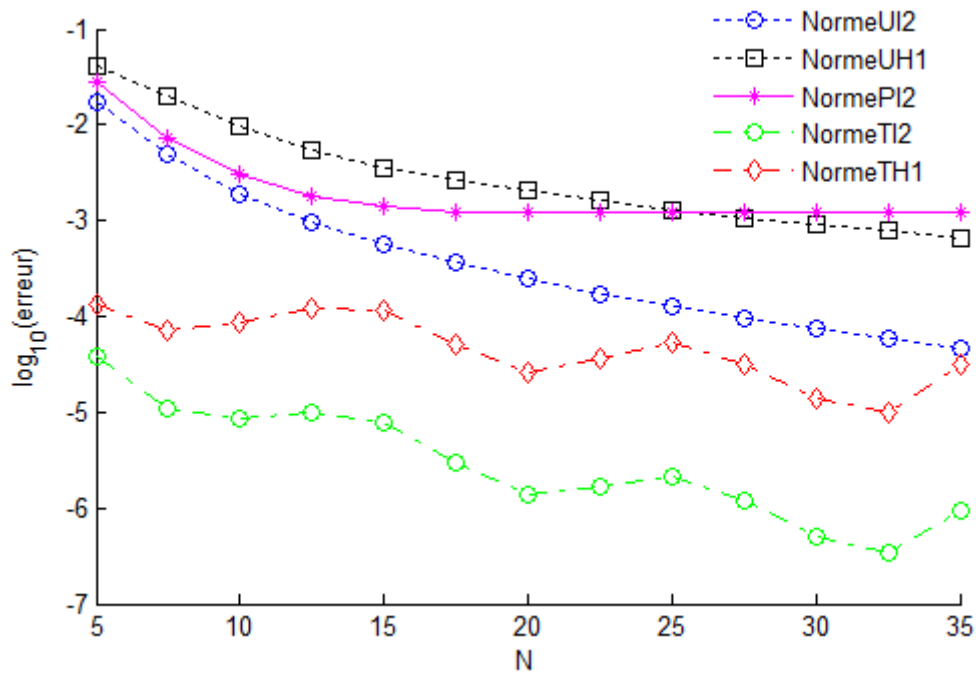


FIGURE 4.2 – Courbe de convergence de (4.6.3) et (4.6.4) pour $\delta t = 10^{-2}$ et $\tilde{T} = 1$.

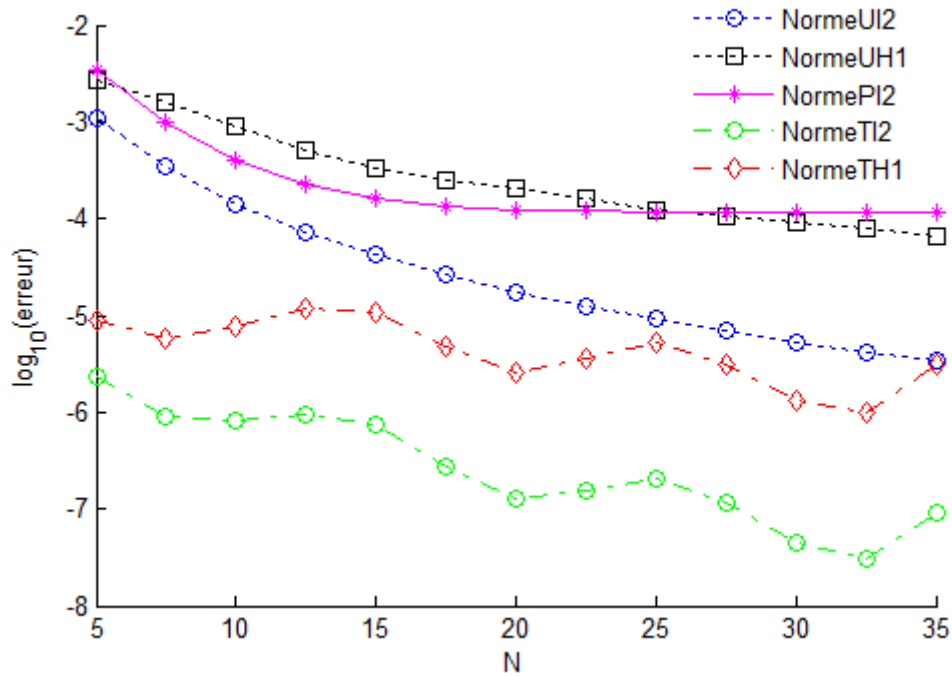


FIGURE 4.3 – Courbe de convergence de (4.6.3) et (4.6.4) pour $\delta t = 10^{-2}$ et $\tilde{T} = 0.1$.

En faisant varier N entre 5 et 35, l'erreur des normes $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)^2}$, $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\|_{H^1(\Omega)^2}$ et $\|p - p_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)}$ diminue strictement, jusqu'à $N = 35$ et stagne pour $N > 35$. Quant à l'erreur des normes $\|T - T_{N\tau}\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|T - T_{N\tau}\|_{H^1(\Omega)}$ diminue mais d'une façon sinusoïdale.

- D'autres calculs

1) Dans le but d'étendre notre étude et de généraliser les résultats obtenus précédemment, nous avons effectué un autre test donné par

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} t(1-x^2)^{5/2}y(1-y^2)^{3/2} \\ -t(1-x^2)^{3/2}x(1-y^2)^{5/2} \end{pmatrix}, \quad (4.6.5)$$

$$p(x, y) = \sin(xyt), \quad T(x, y) = tx + y. \quad (4.6.6)$$

En faisant varier $v(T) : v(T) = T$, $v(T) = 10^{-2}(T+1)$ et $v(T) = 10^{-5}(T+1)$, les erreurs des solutions restent du même ordre. Nous représentons dans le tableau 4.6 ci-dessous le cas où $v(T) = 10^{-5}(T+1)$ calculé pour N fixé à 20.

$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)^2}$	3.6032×10^{-7}
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{N\tau}\ _{H^1(\Omega)^2}$	4.8708×10^{-6}
$\ p - p_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	1.1721×10^{-5}
$\ T - T_{N\tau}\ _{L^2(\Omega)}$	9.3507×10^{-7}
$\ T - T_{N\tau}\ _{H^1(\Omega)}$	3.4917×10^{-6}

TABLE 4.6 – Erreur relative de (4.6.5) et (4.6.6) pour $N = 20$.

Les Figures 4.4 et 4.5 montrent la stabilité de l'algorithme. En effet, nous remarquons une bonne convergence des isovaleurs des solutions approchées par rapport à ceux des solutions réelles pour $N = 40$, $\delta t = 10^{-3}$ et $\tilde{T} = 0.1$.

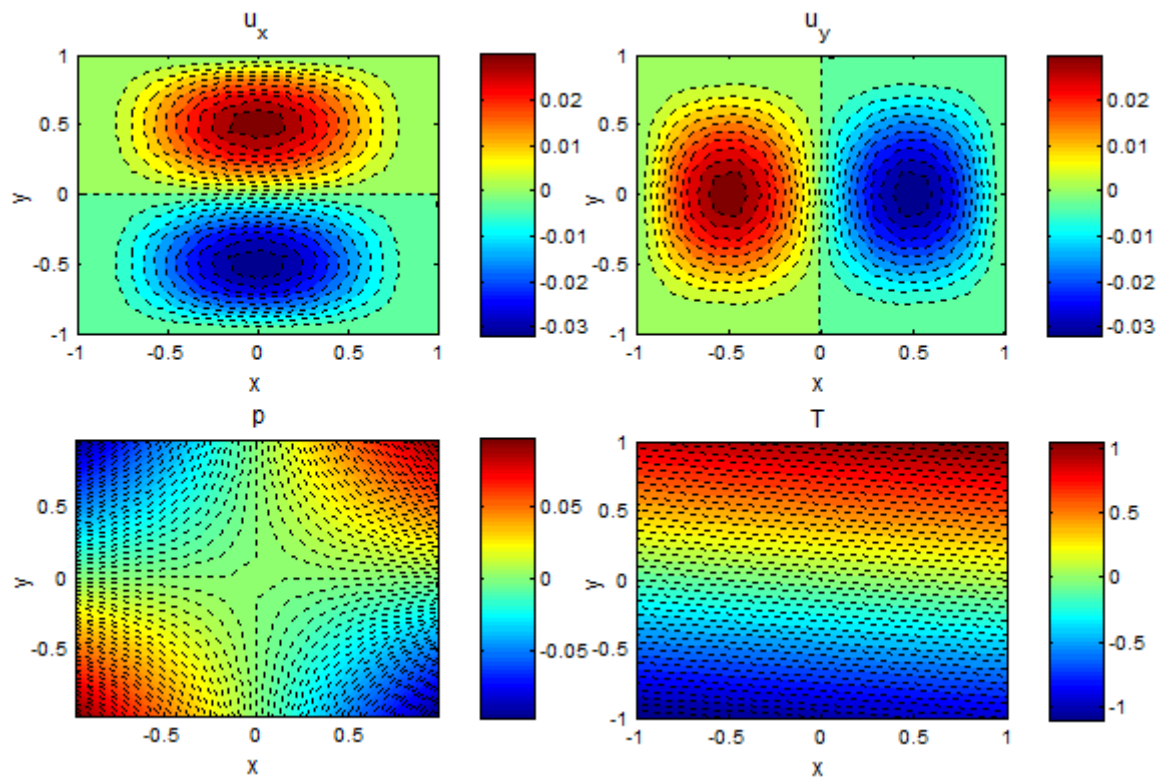


FIGURE 4.4 – Les isovalues de la première et la deuxième compoante de la vitesse exacte (en haut) et de la pression et la température exacte (en bas) pour $N = 40$.

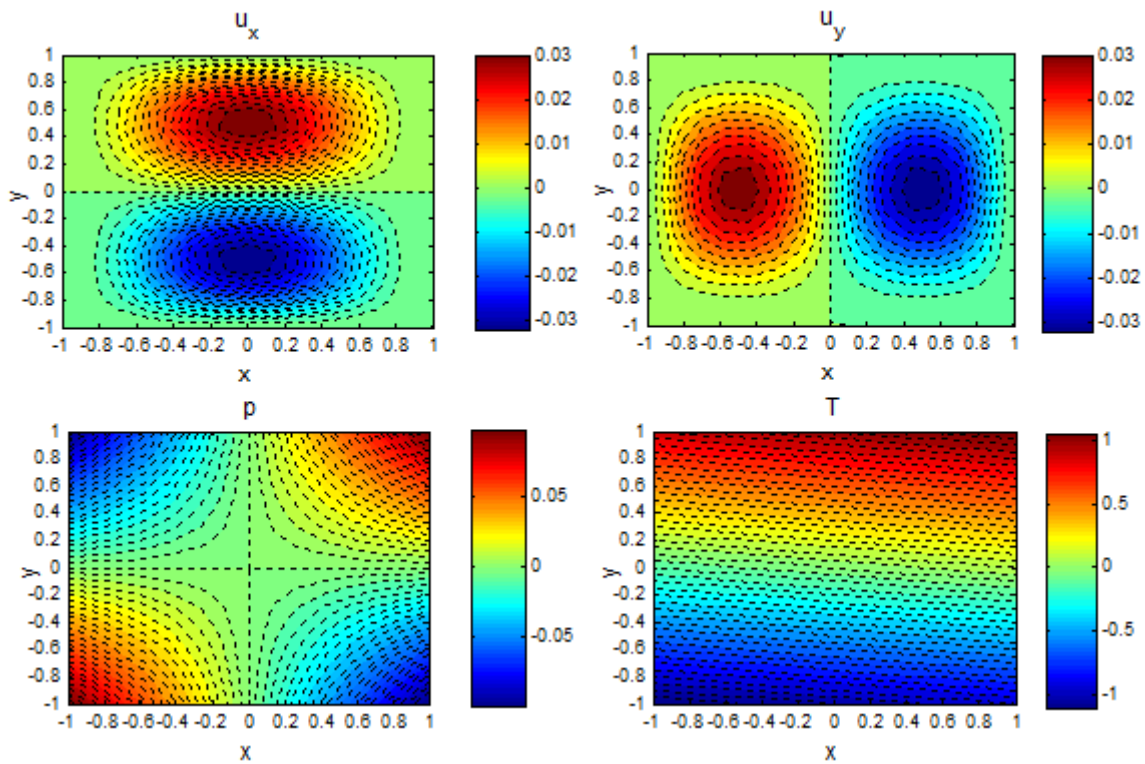


FIGURE 4.5 – Les isovalues de la première et la deuxième compoante de la vitesse calculée (en haut) et de la pression et la température calculée (en bas) pour $N = 40$.

2) Dans le deuxième test on calcule les solutions approchées du problème couplé avec $v(T) = T + 1$, la solution réelle dans ce cas n'est pas connue. Les données sont les suivantes :

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2 + y^2 t}{x^2 + y^2 + t^2} \right), \quad g(x, y) = \sin(xyt). \quad (4.6.7)$$

Nous remplaçons la condition au limite sur la vitesse par

$$\mathbf{u} = \mathbf{h} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \quad (4.6.8)$$

Nous choisissons alors les données aux bords telles que

$$\begin{aligned} \text{Sur } \Gamma_1 = \{x = -1\}, & \quad h_1(x, y) = yt, \quad h_2(x, y) = y^2 t, \quad T_b(x, y) = -y + t + 1, \\ \text{Sur } \Gamma_2 = \{x = 1\}, & \quad h_1(x, y) = yt, \quad h_2(x, y) = -y^2 t, \quad T_b(x, y) = y + t + 1, \\ \text{Sur } \Gamma_3 = \{y = -1\}, & \quad h_1(x, y) = -x^2 t, \quad h_2(x, y) = -xt, \quad T_b(x, y) = -x^3 + t + 1, \\ \text{Sur } \Gamma_3 = \{y = 1\}, & \quad h_1(x, y) = x^2 t, \quad h_2(x, y) = -xt, \quad T_b(x, y) = x^3 + t + 1, \\ \mathbf{u}(t = 0) = \mathbf{0} & \quad \text{et} \quad T(t = 0) = x^3 y + 1. \end{aligned}$$

Remarque 4.6.1 Ici \mathbf{h} vérifie la condition de compatibilité $\int_{\partial\Omega} \mathbf{h}(\tau) \cdot \mathbf{n}(\tau) d(\tau) = 0$.

Dans les Figures 4.6 et 4.7 nous représentons le graphe des solutions approchées de la vitesse, la pression et de la température en choisissant $N = 30$, $\delta t = 10^{-2}$ et $\tilde{T} = 1$. Dans les Figures 4.8 et 4.9 nous représentons les courbes et les isovaleurs des solutions approchées de la vitesse, la pression et de la température pour $N = 25$, $\delta t = 5.10^{-2}$ et $\tilde{T} = 0.1$.

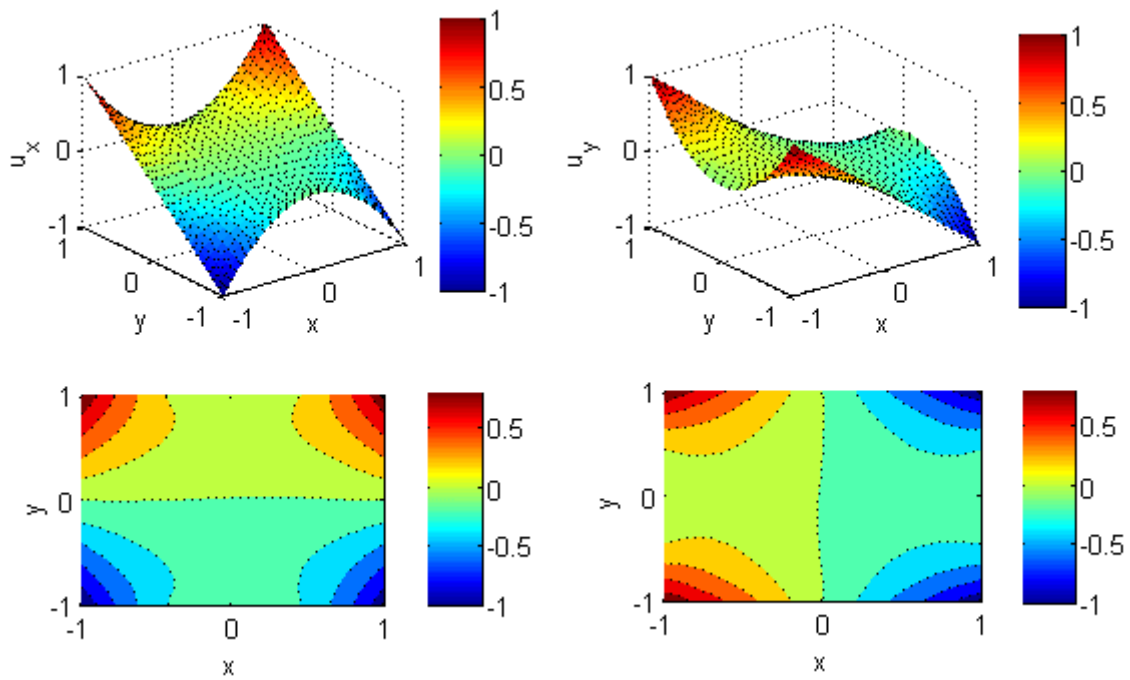


FIGURE 4.6 – Les courbes et les isovaleurs de la première et la deuxième composante de la vitesse pour $\tilde{T} = 1$.

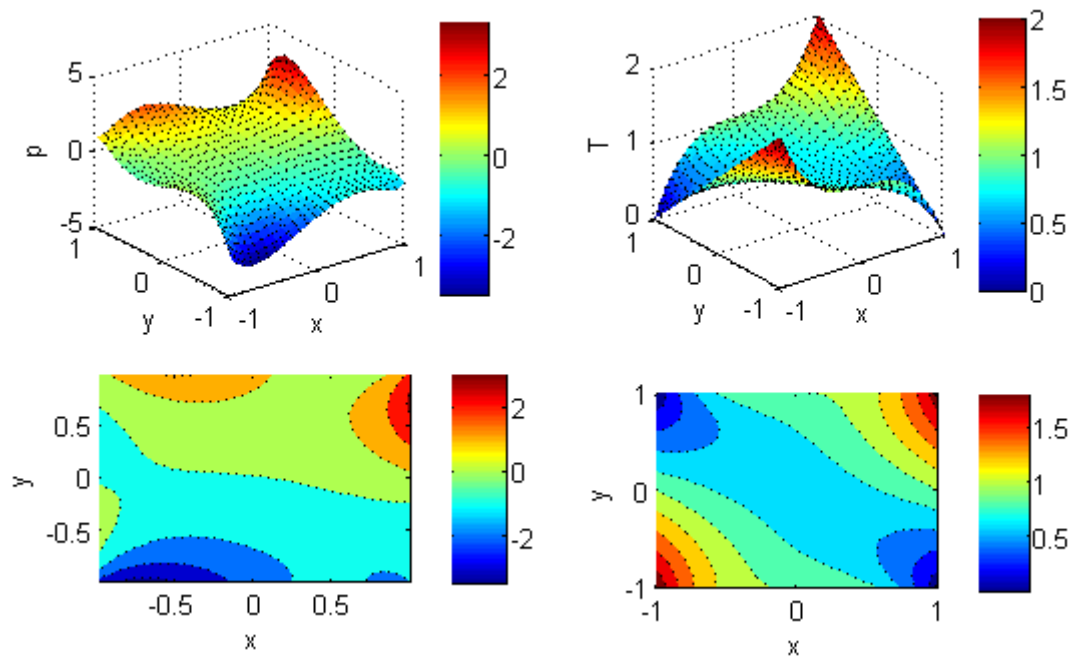


FIGURE 4.7 – Les courbes et les isovaleurs de la fonction pression et la fonction température pour $\tilde{T} = 1$.

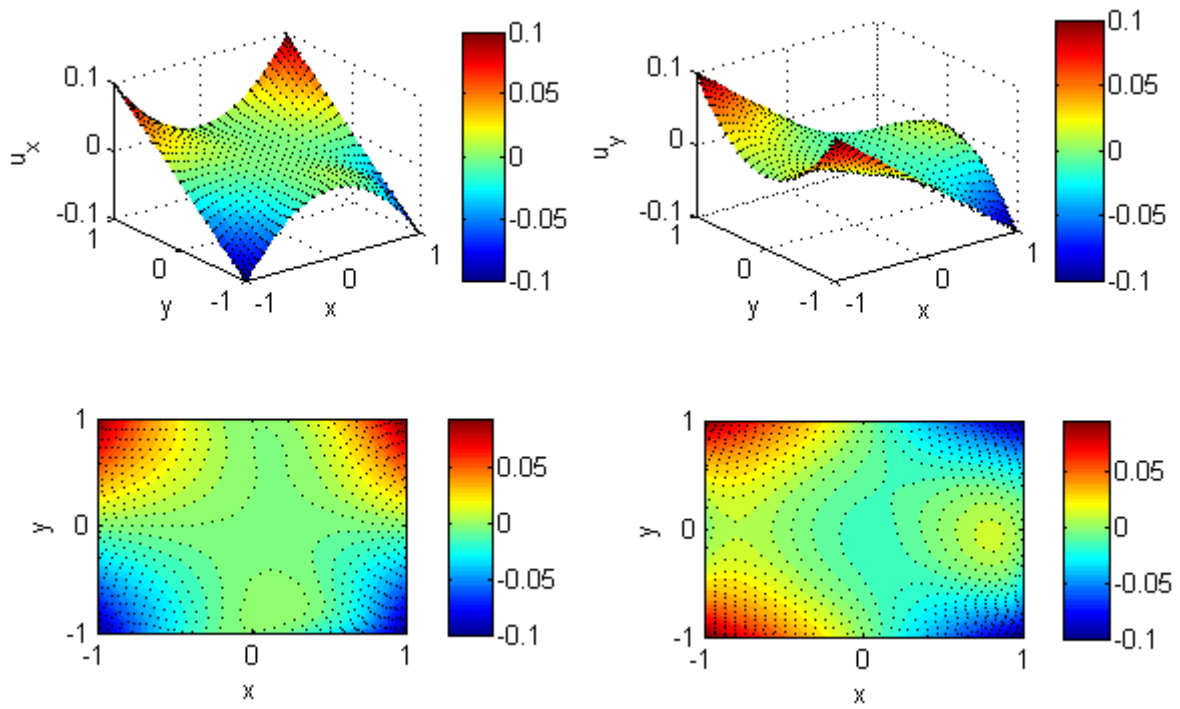


FIGURE 4.8 – Les courbes et les isovaleurs de la première et la deuxième composante de la vitesse pour $\tilde{T} = 0.1$.

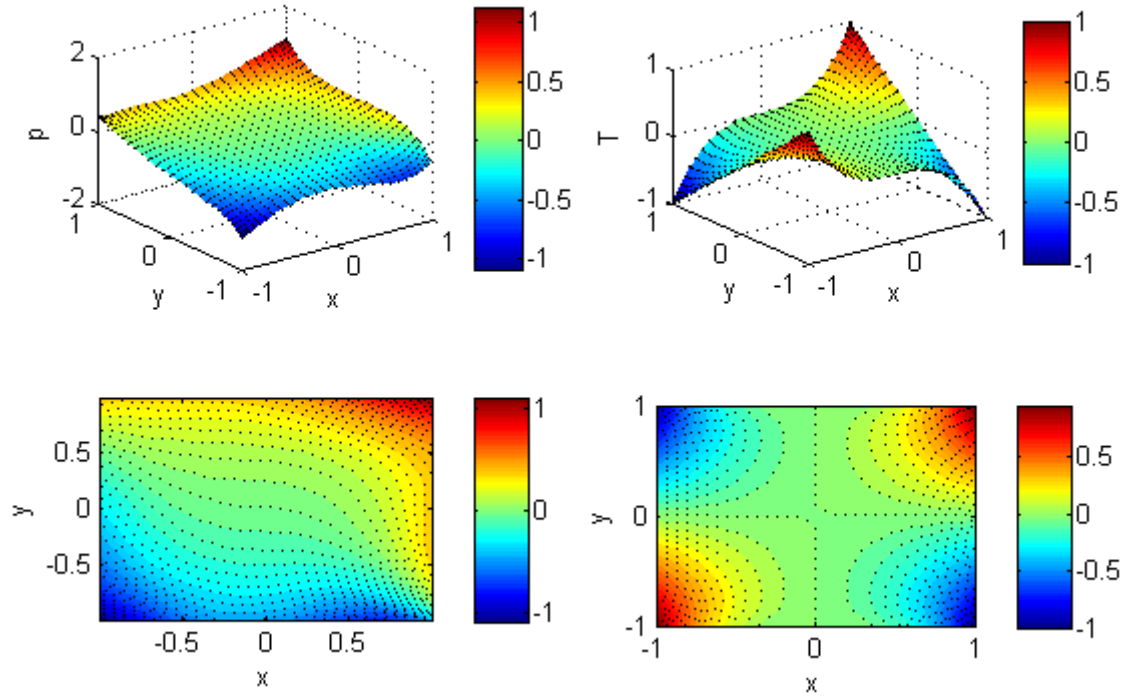


FIGURE 4.9 – Les courbes et les isovaleurs de la fonction pression et la fonction température pour $\tilde{T} = 0.1$.

Conclusion

Au cours de cette thèse, on s'est intéressé à l'approximation spectrale des équations décrivant l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible, telles que les équations de Navier-Stokes. Nous avons choisi de les coupler avec l'équation de la chaleur. D'un point de vue théorique, les travaux présentés dans cette thèse ont porté sur le problème de Navier-Stokes/chaleur stationnaire et instationnaire occupant le domaine $\Omega = \mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3 dans le cas où la viscosité du fluide dépend de la température.

L'étude du problème continu a été faite dans le Chapitre 1. L'analyse spectrale du problème stationnaire et l'analyse numérique correspondante ont été effectuées dans le Chapitre 2. Enfin, nous passons aux équations instationnaires, Chapitre 3. La méthode de discrétisation est la méthode spectrale. On a montrés des résultats d'approximation optimaux. On a fait en outre plusieurs tests numériques qui ont confirmé nos prédictions théoriques, Chapitres 2 et 4. Les bons résultats des différents tests numériques que nous avons obtenus, pour le problème Navier-Stokes/chaleur dans le cas stationnaire ou instationnaire sont cohérents avec nos résultats théoriques. Ils prouvent l'efficacité de la discrétisation spectrale pour ce type de problème.

Enfin, les méthodes spectrales sont des méthodes d'ordre élevé en espace. Une difficulté est qu'elles peuvent perdre une partie de cette précision spatiale par une discrétisation temporelle dont l'ordre serait moins élevé. Cette précision temporelle est souvent, aux mieux, d'ordre 1 ou 2 et peut donc dégrader la précision globale de ces méthodes. Un défi est donc de construire une méthode précise à la fois temporellement et spatialement.

Comme la viscosité du fluide présente de fortes variations, il serait donc intéressant d'étudier les équations de Navier-Stokes/chaleur en remplaçant $\nu(T)$ par un paramètre petit et positif où ces variations sont négligeables, voir [5] pour plus de détails sur ce modèle.

Bibliographie

- [1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.
- [2] K. Arrow, L. Hurwicz, H. Uzawa, Studies in Nonlinear Programming, Stanford University Press, Stanford, 1958.
- [3] M. Azaïez, Calcul de la pression dans le problème de Stokes pour des fluides visqueux incompressibles par une méthode spectrale de collocation. Thèse de doctorat de l'Université de Paris-Sud, 1990.
- [4] K. Bellalouna, Résolutions d'E.D.P. par la méthode spectrale sur un réseau de cylindres, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, 2007.
- [5] C. Bernardi, F. Coquel, P.-A. Raviart, Automatic coupling and finite elements discretization of the Navier-Stokes and heat equations, Internal Report 10001, Laboratoire Jacques-Louis Lions, (2010).
- [6] C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday, M. Azaïez, Spectral Methods for Axisymmetric Domains, "Series in Applied Mathematics"3, Gauthier-Villars North-Holland.
- [7] C. Bernardi, T. Chacón Rebollo, F. Hecht, R. Lewandowski, Automatic insertion of a turbulence model in the finite element discretization of the Navier-Stokes equations, Math. Models and Methods in Applied Sciences **19** (2009), 1139–1183.
- [8] C. Bernardi, Y. Maday, Basic result on spectral methods, Rapport interne R94022, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1994).
- [9] C. Bernardi, Y. Maday, Spectral Methods in the Handbook of Numerical Analysis V, P.G. Ciarlet and J.-L. Lions eds., North-Holland (1997), 209–485.
- [10] C. Bernardi, Y. Maday, B. Métivet, Calcul de la pression dans la résolution spectrale du problème de Stokes. Rech. Aérosp., (**1986-1**), 1–21, 1986.
- [11] C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti, Discrétisation variationnelles de problèmes aux limites elliptiques, Collection "Mathématiques et Application" **45**, Springer-Verlag (2004).
- [12] H. Brezis, Analyse fonctionnelle : Théorie et Applications, Collection "Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise", Masson, Paris, 1983.
- [13] F. Brezzi, J. Rappaz, P.-A. Raviart, Finite dimensional approximation of non linear problems. Part I : Branches of nonsingular solutions, *Numer. Math.* **36** (1980), 1–25.
- [14] M. Bulíček, E. Feireisl, J. Málek, A Navier-Stokes-Fourier system for incompressible fluids with temperature dependent material coefficients, *Nonlinear Analysis : Real World Applications* **10** (2009), 992–1015.

- [15] J.C. Butcher, Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Wiley, 2003.
- [16] P. G. Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Masson, Paris, 1982.
- [17] W. Couzy, Spectral element discretization of the unsteady Navier-Stokes equations and its iterative solution on parallel computers. PhD thesis, num. 1380, EPFL, Lausanne, 1995.
- [18] M. Crouzeix, A. Mignot, Analyse numérique des équations différentielles, Collection "Mathématiques Appliquées pour la maîtrise", Masson, Paris, 1984.
- [19] M. Dauge, Problèmes de Neumann et de Dirichlet sur un polyèdre dans \mathbb{R}^3 : régularité dans les espaces de Sobolev L_p , C.R. Acad. Sc. Paris 307 série I (1988), 27–32.
- [20] M. Dauge, Neumann and mixed problems on curvilinear polyhedra, Integr. Equat. Oper. Th **15** (1992), 227–261.
- [21] P.J. Davis, P. Robinowitz, Methods of Numerical Integration, Academic Press, Orlando, 1985.
- [22] M. Dubiner, Spectral methods on triangles and other domains, scientific Comp., Plenum Publishing Corp.eds, 1991.
- [23] A. Ern, J.-L. Guermond, Éléments finis : Théorie, applications, mise en œuvre, Mathématiques et Applications, Springer, 2001.
- [24] V. Girault, P.-A. Raviart, Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms, Springer-Verlag, Berlin, (1986).
- [25] P. Grisvard, Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Pitman (1985).
- [26] T. A. Zang, M. Y. Hussaini, Fourier Legendre spectral methods for incompressible channel flow, dans Proc. 9th Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Saclay, 1984.
- [27] J.-L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications volume 1, Travaux et recherches mathématiques, 1968.
- [28] Y. Maday, Résultats d'approximation optimaux pour les opérateurs d'interpolation polynômiale, C.R. Acad. Sci. Paris, **312** Série I, 1991, 705–710.
- [29] Y. Maday, A.T. Patera, E. M Rønquist, The $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_{N-2}$ method for the approximation of the Stokes problem. Laboratoire d'Analyse Numérique, Paris VI, **11**, fasc. 4, 1992.
- [30] N.G. Meyers, An L^p -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **17** (1963), 189–206.
- [31] S.A. Orszag, Comparaison of pseudospectral and spectral approximations, Stud. Appl. Math. 51 (1972), 253–259.
- [32] A. Quarteroni, Some results of Bernstein and Jackson type for polynomial approximation in L^p -spaces, *Japan J. Applied Math.* **1** (1984), 173–181.
- [33] E.M Rønquist, Optimal spectral element methods for the unsteady 3-dimensionnal incompressible Navier-Stokes equations. PhD thesis, M.I.T., Cambridge, Mass, 1990.

- [34] M. Schatzman, *Analyse numérique*, InterEditions, Paris (1991).
- [35] M. Schumack, W. Schultz, J. Boyd, Spectral method solution of the Stokes equations on nonstaggered grids. *J. Comput. Phys.*, **94**, (1991), 30–58.
- [36] S. J. Sher Win, G.E. Karniadakis, Tetrahedral h-p finite elements : algorithms and flow simulations, *J. Comput. Physics*, pp. 124, 1996, 14–45.
- [37] G. Talenti, Best constant in Sobolev inequality, *Ann. Math. Pura ed Appl.* **110** serie IV (1976), 353–372.
- [38] R. Temam — *Navier–Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 2, North-Holland Publishing Co. (1977).

Résumé

Nous considérons dans cette thèse la discrétisation par la méthode spectrale et la simulation numérique de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible occupant le domaine Ω modélisé par les équations de Navier-Stokes. Nous avons choisi de les coupler avec l'équation de la chaleur dans le cas où la viscosité dépend de la température avec des conditions aux limites portant sur la vitesse et la température. La méthode s'avère optimale en ce sens que l'erreur obtenue n'est limitée que par la régularité de la solution. Elle est de type spectrale. Nous donnons des estimations d'erreur *a priori* optimales et nous confirmons l'étude théorique par des résultats numériques. Nous considérons aussi les équations de Navier-Stokes/chaleur stationnaires dont nous proposons une discrétisation en temps et en espace en utilisant le schéma d'Euler implicite et les méthodes spectrales. Quelques expériences numériques confirment l'intérêt de la discrétisation.

Mots-clés : équations de Navier-Stokes, équations de chaleur, méthode spectrale, schéma d'Euler, estimations d'erreur.

Abstract

In this thesis we consider the discretization by spectral method and the numerical simulation of a viscous incompressible fluid in the domain Ω , the model being the Navier-Stokes equations. We have chosen to couple them with the heat equation where the viscosity of the fluid depends on the temperature, with boundary conditions which involve the velocity and the temperature. The method is proved to be optimal in the sense that the order of convergence is only limited by the regularity of the solution. The numerical analysis of the discrete problem is performed and numerical experiments are presented, they turn out to be in good coherence with the theoretical results. Finally, we consider the unsteady Navier-Stokes/heat equations which models the time-dependent flow. We propose a discretization of this problem that relies on a backward Euler's scheme in time and spectral methods in space and present some numerical experiments which confirm the interest of the discretization.

Keywords : Navier-Stokes equations, heat equations, spectral method, Euler's scheme, erreur estimates.